Notizen der Vorlesungsreihe

Analysis

- Definitionen & Theoreme -

in den Jahren 2016–2018

– Prof. Dr. Guido Sweers –

Stand:
Mittwoch, 06. Februar 2019

Version 0.2

Mathematisches Institut
Universität zu Köln

Dieses Buch ist, wie auch weitere Skripte & Zusammenfassungen zu den Themen

- Lineare Algebra
- Numerische Mathematik
- Operations Research

online als PDF verfügbar.

Download unter `https://goo.gl/5mbCQc`.

Anmerkungen, Kommentare, Fehlerhinweise oder Verbesserungsvorschläge können gerne dort online abgegeben werden.

Alternativ natürlich auch per E-Mail an:

Tim_Steinbach@T-Online.de

Inhaltsverzeichnis

iii. Analysis III

Analysis I

1. Zahlen

1.1. Elementares

1.1.1. Symbole und Aussagen

Aussagenlogik

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen.

- $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ heißt „$\mathcal{A}$ **und** $\mathcal{B}$ gelten“
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ heißt „$\mathcal{A}$ **oder** $\mathcal{B}$ gilt“ (auch beides gleichzeitig ist erlaubt)
- $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ heißt „wenn $\mathcal{A}$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{B}$“ (**Implikation** oder **Folgerung**)
  $\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B}$ bedeutet $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$
  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ bedeutet $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B})$ (**Äquivalenz**)
- $\neg\mathcal{A}$ ist die **Verneinung** oder **Negation** von $\mathcal{A}$

Lemma 1.1:
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beliebige Aussagen. Dann gilt die logische Umkehrung:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

Symbole der Mengenlehre

- $x \in A$ heißt „x ist *ein* **Element** von A“
- $x \notin A$ heißt „x ist *kein* **Element** von A“
- $A \subset B$ heißt „A ist eine **Teilmenge** von B“. Diese Teilmengenbeziehung bezeichnet man auch als **Inklusion**
- Sei M eine Menge und $S \subset M$. Dann bezeichnet $S^{\mathsf{C}} = M \setminus S$ das **Komplement** von S
- $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die **Vereinigung** beider Mengen („oder“ ist hier nicht ausschließend)
- $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ und } x \in B\}$ ist der **Durchschnitt** beider Mengen
- $A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ und } x \notin B\}$ ist die **Differenz** beider Mengen
- $\emptyset$ heißt die **leere Menge**
- $\exists$ heißt „es existiert *mindestens* ein“ und $\exists!$ heißt „es existiert *genau* ein“
- $\forall$ heißt „für alle“

Lemma 1.2:
Sei A eine Menge und $\mathcal{A}_x$ eine Aussage für $x \in A$. Dann folgt:

$$\neg(\forall x \in A \textit{ gilt } \mathcal{A}_x) \Leftrightarrow (\exists x \in A \textit{ mit } \mathcal{A}_x \textit{ gilt nicht})$$

Dies kann man noch kürzer fassen mittels:

$$\neg(\forall x \in A \colon \mathcal{A}_x) \Leftrightarrow (\exists x \in A \colon \neg\mathcal{A}_x)$$

Rechenregeln für Mengen

Seien A, B und C beliebige Mengen.

- De Morgansche Regeln

$$\begin{aligned}(A \cup B)^{\mathsf{C}} &= A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}} \\ (A \cap B)^{\mathsf{C}} &= A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\end{aligned}$$

- Differenzen

$$\begin{aligned}A \setminus B &= A \cap B^{\mathsf{C}} \\ &= B^{\mathsf{C}} \setminus A^{\mathsf{C}} \\ A \setminus (B \setminus C) &= (A \cap C) \cup (A \setminus B) \\ (A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus B \\ &= A \cap (C \setminus B) \\ (A \setminus B) \cup C &= (A \cup C) \setminus (B \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus C) \cup (A \setminus B) \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus C) \cap (A \setminus B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \,\Delta\, B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)\end{aligned}$$

  Hierbei bezeichnet Δ die **symmetrische Differenz** von A und B.

- Teilmengen

$$\begin{aligned}A \subset B &\Leftrightarrow B^{\mathsf{C}} \subset A^{\mathsf{C}} \\ A \subset B &\Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset\end{aligned}$$

Regeln für eine Menge

Sei M eine beliebige (Grund-)Menge und sei $A \subset M$.

- Vereinigung & Schnitt

$$\begin{aligned}A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \\ A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \emptyset &= \emptyset\end{aligned}$$

- Komplement

$$\begin{aligned}\left(A^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} &= A \\ A \cup A^{\mathsf{C}} &= M\end{aligned}$$

Regeln für mehrere Mengen

Seien A, B und C beliebige Mengen.

- Assoziativität

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\\ &= A \cup B \cup C\\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\\ &= A \cap B \cap C\end{aligned}$$

- Kommutativität

$$\begin{aligned}A \cup B &= B \cup A\\ A \cap B &= B \cap A\end{aligned}$$

- Distributivität

$$\begin{aligned}A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

1.2. Natürliche Zahlen

Die Menge der **natürlichen Zahlen** nennt man $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Weiterhin definiert man $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Bemerkung 1.1:
Je nachdem ob man bei folgenden Definitionen und Sätzen öfter die Null mit in der Menge oder außerhalb der Menge benötigt, definiert man alternativ schon mal

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Im Nachfolgenden ist hier mit $\mathbb{N}$ immer die erste Definition, die mit Null, gemeint.

Addition und Multiplikation sind Abbildungen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Definition 1.1 (kartesisches Produkt):
Das ***kartesische Produkt*** *$A \times B$ (lies „A kreuz B“) zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$ ist. Dabei wird jedes Element aus A mit jedem Element aus B kombiniert. Formal ist das kartesische Produkt durch*

$$A \times B := \Big\{(a, b) \colon a \in A, b \in B\Big\}$$

definiert. Das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst ist

$$A^2 = A \times A = \Big\{(a, a') \colon a, a' \in A\Big\}$$

Definition 1.2 (induktive Menge):
*Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls*

1. $0 \in M$
2. $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Bemerkung 1.2:
Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Menge.

Definition 1.3 (natürliche Zahlen nach Peano):
$\mathbb{N}$ wird definiert durch:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. *Es gibt eine Nachfolgerabbildung $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass:*
   (a) $0 \notin N(\mathbb{N})$
   (b) $N(n) = N(k) \Rightarrow n = k$ *(N ist injektiv[a])*
   (c) *wenn $A \subset \mathbb{N}$ derart ist, dass $0 \in A$ und $N(A) \subset A$, so gilt $A = \mathbb{N}$*

Man schreibt: $N(0) = 1$, $N(N(0)) = 2$ usw.

[a] *vgl.* Definition 5.2 (injektive Funktion)

Definition 1.4 (Primzahl):
*Jede natürliche Zahl $n \geq 2$, die nur durch n und 1 innerhalb $\mathbb{N}$ teilbar ist, nennt man **Primzahl**.*

Lemma 1.3:
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

1.2.1. Vollständige Induktion

Theorem 1.1 (Induktionsprinzip):
Sei $\mathcal{B}(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Behauptungen. Nehme an

1. $\mathcal{B}(0)$ *gilt, und*
2. $\big(\mathcal{B}(n) \Rightarrow \mathcal{B}(n+1)\big)$ *gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

Dann hat man „$\mathcal{B}(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$“.

Lemma 1.4 (Bernoullische Ungleichung):
Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

1.2.2. Funktionen auf $\mathbb{N}$

Definition 1.5 (Familie von Elementen):
Seien I und X zwei Mengen. Eine Abbildung $I \to X, i \mapsto x_i$ heißt auch eine ***Familie von Elementen*** *von X, geschrieben $(x_i)_{i\in I}$. Die Menge I heißt* ***Indexmenge****.*
Ist $I = 1, 2, \ldots, n$ so heißt $(x_i)_{i\in I} := (x_1, \ldots, x_n)$ ein ***n-Tupel****.*
Weitere Notationsvarianten: $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{1\leq i\leq n} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} = (x_i)_{i=1}^{n}$.

Notation

Seien die a_k beliebige Zahlen. Man schreibt für $n \in \mathbb{N}_+$ folgendes:

- **Summe**: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- **Produkt**: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Bei den Pünktchen geht man davon aus, dass diese eindeutig und passend ergänzt werden. Eine präzise Definition wäre *induktiv*:

1. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ und
2. $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Die Variable k wird eigentlich nicht benötigt und ist hier nur eine Notationshilfe.
Außerdem vereinbart man, dass

- $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ (**leere Summe**)
- $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1$ (**leeres Produkt**)

Sei I eine Indexmenge mit n Elementen und $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen. Sei $I = i_1, \ldots, i_n$ eine Aufzählung von I. Dann setzen wir

$$\sum_{i\in I} x_i := \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$$

Analog gilt für die leere Summe und das leere Produkt

$$\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i\in\emptyset} x_i = 1$$

Definition 1.6 (Faktorielle):
Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k \geq 0$ wird die ***k-te fallende*** *bzw.* ***steigende Faktorielle*** *als $n^{\underline{k}}$ bzw. $n^{\overline{k}}$ notiert und ist wie folgt definiert:*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} n - i = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1} n + i = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

Bemerkung 1.3:
Die Faktorielle kann man auch mit Hilfe der Gamma-Funktion[a] ermitteln. Es gilt:

$$x^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$
$$x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$$

[a] *vgl.* Bemerkung 25.2

Definition 1.7 (Fakultät):
*Man definiert die **Fakultät** für $n \in \mathbb{N}$*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

sprich „n-Fakultät", und dies kann man auch schreiben als

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, & \text{für } n > 0 \\ 1, & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.4:
Die seltener verwendete **Doppelfakultät** ist für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert[a]:

$$n!! := \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 2, & \text{für } n > 0 \text{ gerade} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1, & \text{für } n > 0 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Analog zur doppelten Fakultät wird auch die dreifache ($n!!!$), vierfache ($n!!!!$), ..., **k-fache Fakultät** ($n!^{(k)}$) rekursiv definiert als

$$n!^{(k)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n, & \text{falls } 0 < n \leq k \\ n(n-k)!^{(k)}, & \text{falls } n > k \end{cases}$$

Diese wird auch als **Multifakultät** bezeichnet.

[a] Die Doppelfakultät lässt sich auch mittels der einfachen Fakultät und der Potenz berechnen:

$$(2k)!! = 2^k \cdot k!$$
$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$$

Bemerkung 1.5:
Es gibt noch weitere Fakultäten:

- Die **Subfakultät** wird definiert als

$$!n := n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

- Mit **Superfakultät** wird das Produkt der ersten Fakultäten bezeichnet:

$$\mathrm{super}(n) := \prod_{i=1}^{n} i! = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot n!$$

- Die **Hyperfakultät** ist für $n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{hyper}(n) := \prod_{i=0}^{n} i^i = 0^0 \cdot 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot n^n$$

- Die **Fibonacci-Fakultät** von $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als das Produkt der ersten n Fibonacci-Zahlen[a], d. h.

$$n!_F := \prod_{i=1}^{n} F_i$$

  wobei F_i die i-te Fibonacci-Zahl ist.

- Die **Primfakultät** $n_\#$ von $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als das Produkt aller Primzahlen kleiner oder gleich n, d. h.

$$n_\# := \prod_{p \text{ prim}}^{p \leq n} p$$

[a] Die Fibonacci-Folge ist rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Definition 1.8 (Binomialkoeffizient):
Man definiert den ***Binomialkoeffizienten*** *für $n, k \in \mathbb{N}$:*

$$\binom{n}{k} := \prod_{m=1}^{k} \frac{n+1-m}{k+1-m} \quad \in \mathbb{N}$$

Man spricht „n über k“ und kann auch schreiben:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+3}{3} \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot \frac{n-k+1}{1}, & \text{für } k > 0 \\ 1, & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Das Pascalsche Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots & & & \ddots \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Identitäten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ für } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ für } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Lemma 1.5:
Für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen x, y ungleich 0 gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Analog zum Binomialkoeffizient lässt sich auch ein **Trinomialkoeffizient** definieren. Der Unterschied wird deutlich, wenn man das Pascalsche Dreieck betrachtet. Dort wurde immer die Summe der beiden darüberstehende Einträge gebildet, hier bildet man die Summe der *drei* darüberstehenden Einträge.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Die Zeilen werden dabei mit $n = 0$ beginnend gezählt, die Einträge in der n-ten Zeile mit $k = -n$ beginnend bis $k = n$. Der mittlere Eintrag hat also Index $k = 0$.
Der Trinomialkoeffizient lässt sich rekursiv definieren:

$$\binom{0}{0}_3 = 1$$

$$\binom{n}{k}_3 = \binom{n-1}{k-1}_3 + \binom{n-1}{k}_3 + \binom{n-1}{k+1}_3 \text{ für } n \geq 0$$

wobei $\binom{n}{k}_3 = 0$ ist für $k < -n$ und $k > n$.

Es gilt analog zum Binomialkoeffizienten: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_3 = 3^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Der **Multinomialkoeffizient** oder auch **Polynomialkoeffizient** ist eine Erweiterung des Binomialkoeffizienten. Für nicht-negative ganze Zahlen $k_1, \dots, k_r$ und $n := k_1 + \dots + k_r$ ist er definiert als

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r}_p := \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

1.2.3. Ganze Zahlen

Bemerkung 1.6:
Für eine Menge A definieren wir die Menge $-A$ als

$$-A := \{-a \colon a \in A\}$$

Definition 1.9 (ganze Zahlen):
*Die Menge der **ganzen Zahlen** nennt man $\mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}_+ = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Addition, Multiplikation und sogar Subtraktion lassen sich auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren. Man sagt $n \leq m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $n + k = m$.

Für die Teilmenge der *geraden Zahlen* schreibt man $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ und für die Teilmenge der *ungeraden Zahlen* $2\mathbb{Z} + 1 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

1.3. Rationale Zahlen

Definition 1.10 (rationale Zahlen):
*Die Menge der **rationalen Zahlen** nennt man $\mathbb{Q}$:*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

Dabei unterscheidet man jedoch zum Beispiel nicht zwischen $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$. Man sagt $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, wenn $mb = an$. Addition und Multiplikation werden definiert durch

$$\frac{m}{n} + \frac{a}{b} = \frac{mb + na}{nb} \text{ und } \frac{m}{n}\frac{a}{b} = \frac{ma}{nb}$$

Identifiziert man $\frac{m}{1}$ mit m, dann ist $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

Bemerkung 1.7:
Eine Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt irrational. Die Menge aller **irrationalen Zahlen** wird oft mit $\mathbb{I}$ bezeichnet. (Vergleiche mit Kapitel 2 „Reelle Zahlen“ und siehe Abschnitt 1.3.4 „Rationale Zahlen reichen nicht“)

1.3.1. Algebraische Eigenschaften

Mit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ meint man, dass $\mathbb{K}$ eine Menge ist, auf welcher Addition „+“ und Multiplikation „·“ definiert sind. Insbesondere soll $\mathbb{K}$ **abgeschlossen** sein unter diesen beiden Verknüpfungen, d. h. für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a + b \in \mathbb{K}$ und $a \cdot b \in \mathbb{K}$.

Definition 1.11 (Verknüpfung):
Eine ***(innere) Verknüpfung*** *auf einer Menge M ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \circ\colon M \times M &\to M \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 \circ m_2 \end{aligned}$$

Man nennt die Verknüpfung „∘“ ***assoziativ****, falls*

$$(m_1 \circ m_2) \circ m_3 = m_1 \circ (m_2 \circ m_3) \quad \forall m_1, m_2, m_3 \in M$$

und ***kommutativ*** *oder* ***abelsch****, falls*

$$\forall m_1, m_2 \in M\colon m_1 \circ m_2 = m_2 \circ m_1$$

Notation: *Für die Verknüpfung zweier Elemente $a, b \in M$, schreibt man statt $a \circ b$ auch kurz ab.*

Definition 1.12 (Magma):
Ein ***Magma*** *ist ein Paar $(M, \circ)$, bestehend aus einer Menge M (der Trägermenge) und einer zweistelligen inneren Verknüpfung „∘“.*

Definition 1.13 (Halbgruppe):
Eine ***Halbgruppe*** *ist ein Paar $(M, \circ)$, welche aus einer Menge M und einer assoziativen inneren zweistelligen Verknüpfung „∘“ besteht.*

Definition 1.14 (neutrales Element):
Sei $(M, \circ)$ ein Magma. Ein Element $e \in M$ heißt

- ***linksneutral****, falls $e \circ m = m$ für alle $m \in M$ ist*
- ***rechtsneutral****, falls $m \circ e = m$ für alle $m \in M$ ist*
- ***neutral****, falls e linksneutral und rechtsneutral ist, d. h.*

$$\forall m \in M\colon e \circ m = m \quad \text{und} \quad m \circ e = m$$

Bemerkung 1.8:
Bei multiplikativer Schreibweise nennt man ein neutrales Element auch **Einselement** ($e = 1$ oder kurz $\mathbb{1}$), bei additiver Schreibweise auch **Nullelement** ($e = 0$ oder kurz $\mathbb{0}$).

Bemerkung 1.9:
Wenn ein neutrales Element existiert, ist es eindeutig denn für e, e' neutrale Elemente gilt:

$$e \overset{e' \text{ neutral}}{=} e \circ e' \overset{e \text{ neutral}}{=} e'$$

Definition 1.15 (Monoid):
Sei $(M, \circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e. Das Tripel $(M, \circ, e)$ nennt man ***Monoid****.*

Definition 1.16 (invertierbares Element & Einheiten):
Sei $(M, \circ, e)$ ein Monoid. Für $a, b \in M$ mit $a \circ b = e$ heißt

- *a **rechtsinvertierbar** mit dem rechtsinversen Element b, und*
- *b **linksinvertierbar** mit dem linksinversen Element a.*

*Sei $m \in M$, dann heißt m **invertierbar** oder eine **Einheit**, falls gilt:*

$$\exists n \in M : m \circ n = e \quad \text{und} \quad n \circ m = e$$

*Die **Menge aller Einheiten** von M wird mit $M^\times$ bezeichnet:*

$$M^\times := \{a \in M : a \text{ ist invertierbar}\}$$

Bemerkung 1.10:
Bei multiplikativer Schreibweise spricht man von dem **Inversen** a^{-1} von a. Bei additiver Schreibweise spricht man auch vom **Negativen** $-a$ von a.

Bemerkung 1.11:
Wenn m invertierbar ist, dann ist n eindeutig. Angenommen n, n' sind inverse zu m.

$$n = n \circ e = n \circ (m \circ n') = (n \circ m) \circ n' = e \circ n' = n'$$

Da inverse eindeutig sind, benutzen wir die Notation m^{-1}.

Definition 1.17 (Gruppe):
Sei $(G, \circ, e)$ ein Monoid mit $G \neq \emptyset$, so dass alle Elemente von G invertierbar sind. Dann heißt das Paar $(G, \circ)$ eine ***Gruppe****.*

Definition 1.18 (abelsche Gruppe):
*Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch**, falls*

$$\forall g, g' \in G : g \circ g' = g' \circ g$$

Definition 1.19 (Untergruppe):
*Eine **Untergruppe** $(H, \circ)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist eine nicht-leere Teilmenge von G, die selbst eine Gruppe ist, d. h.*

1. $e \in H$
2. $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$
3. $h, h' \in H \Rightarrow h \circ h' \in H$

Notation: $H < G$.

Definition 1.20 (endliche Gruppe & Gruppenordnung):
*Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt **endlich**, falls sie nur endlich viele Elemente enthält. Die Mächtigkeit von G (also die Anzahl der Gruppenelemente) nennen wir die **Ordnung** von G.*

$$\text{Man schreibt } \operatorname{ord}(G) = |G| = \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } G, & \text{falls } G \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 1.21 (Körper):
*Man nennt $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ einen **Körper**, wenn*

- $(\mathbb{K}, +)$ ***ist abelsche Gruppe:***
  1. *Assoziativität:* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$
  2. *neutrales Element:* $\exists \mathbb{0} \in \mathbb{K}$, *so dass* $\forall x \in \mathbb{K}$ *gilt* $x + \mathbb{0} = x$
  3. *inverse Elemente:* $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists -x \in \mathbb{K}$, *so dass* $x + (-x) = \mathbb{0}$
  4. *Kommutativität:* $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon x + y = y + x$
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ***ist abelsche Gruppe:***
  5. *Assoziativität:* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  6. *neutrales Element:* $\exists \mathbb{1} \in \mathbb{K}$ *mit* $\mathbb{1} \neq \mathbb{0}$, *so dass* $\forall x \in \mathbb{K}$ *gilt* $x \cdot \mathbb{1} = x$
  7. *inverse Elemente:* $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{K}$, *so dass* $x \cdot x^{-1} = \mathbb{1}$
  8. *Kommutativität:* $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon x \cdot y = y \cdot x$
- 9. ***Distributivität:*** $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Bemerkung 1.12:
$\mathbb{Q}$ wird mit Addition und Multiplikation ein Körper.

1.3.2. Ordnung

Auf $\mathbb{Z}$ gibt es eine **natürliche Ordnung**. Man schriebt $z_1 < z_2$, wenn z_1 links von z_2 in der Standardauflistung von $\mathbb{Z}$ steht und $z_1 \leq z_2$, wenn z_1 nicht rechts von z_2 steht. Diese Ordnung von $\mathbb{Z}$ können wir übertragen auf $\mathbb{Q}$.

Definition 1.22 (Ordnung für $\mathbb{Q}$):
Seien $\frac{m}{n}$ *und* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. *Man schreibt*

$$\frac{m}{n} \leq \frac{a}{b}, \text{ wenn } mb \leq na$$

und $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$, *wenn* $\frac{m}{n} \leq \frac{a}{b}$ *und* $\frac{m}{n} \neq \frac{a}{b}$.

1.3.3. Unendlich und abzählbar

Definition 1.23 (unendlich & abzählbar unendlich):

1. *Man nennt eine Menge A* ***unendlich****, wenn A nicht-leer ist und wenn es eine Abbildung $f: A \to A$ gibt, die injektiv*[a]*, aber nicht surjektiv*[b] *ist.*
2. *Man nennt eine Menge A* ***abzählbar unendlich****, wenn A unendlich ist und es eine surjektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to A$ gibt.*

[a] *vgl.* Definition 5.2 (injektive Funktion)
[b] *vgl.* Definition 5.3 (surjektive Funktion)

Lemma 1.6:
$\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

1.3.4. Rationale Zahlen reichen nicht

Lemma 1.7:
Es gibt keine rationale Zahl x so dass $x^2 = 2$.

2. Reelle Zahlen

2.1. Ordnung

Definition 2.1 (Ordnung für Körper):
*Man nennt $\leq$ eine **Ordnung** für $\mathbb{K}$, wenn*

1. *für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt $a \leq a$ (**Reflexivität**)*
2. *für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $b \leq a$ gilt $a = b$ (**Antisymmetrie**)*
3. *für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt $a \leq c$ (**Transitivität**)*

Definition 2.2 (totale Ordnung):
*$(\mathbb{K}, \leq)$ nennt man **total geordnet**, wenn $\leq$ eine Ordnung für $\mathbb{K}$ ist und zusätzlich*

4. *für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt, $a \leq b$ oder $b \leq a$*

Definition 2.3 (total geordneter Körper):
*$(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ heißt ein **total geordneter Körper**, wenn*

1. *$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist*
2. *$(\mathbb{K}, \leq)$ total geordnet ist*
3. *für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ gilt $a + c \leq b + c$*
4. *für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $0 \leq c$ gilt $a \cdot c \leq b \cdot c$*
   Analog gilt mit $a \leq b$ und $0 \geq c$, dass $a \cdot c \geq b \cdot c$

$(\mathbb{K}, +, \leq)$ heißt eine **total geordnete Gruppe**, wenn $(\mathbb{K}, +)$ eine Gruppe ist und die Bedingungen 2 und 3 aus Definition 2.3 erfüllt sind.

Bemerkung 2.1:
$(\mathbb{Z}, +, \leq)$ ist eine total geordnete Gruppe und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein total geordneter Körper.

Satz 2.1 (Rechenregeln für Ungleichungen):
Sei $\mathbb{K}$ ein total geordneter Körper. Für alle $x, y, z, t \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $x < y \Rightarrow -y < -x$
2. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ *(Insbesondere: $1 > 0$)*
3. $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ *(Analog: $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$)*
4. $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ *sowie* $\frac{x}{y} < 1$ *und* $\frac{y}{x} > 1$
5. $x < y$ *und* $z < t \Rightarrow x + z < y + t$
6. $0 < x < y$ *und* $0 < z < t \Rightarrow 0 < xz < yt$
7. $x < y$ *und* $0 < t < 1 \Rightarrow x < tx + (1-t)y < y$

2.2. Eine Einführung der reellen Zahlen

Definition 2.4 (Äquivalenzrelation):
*Eine Relation $\sim$ auf M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn*

1. ***Reflexivität**: für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$*
2. ***Symmetrie**: für alle $x, y \in M$ mit $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$*
3. ***Transitivität**: für alle $x, y, z \in M$ mit $(x \sim y \wedge y \sim z) \Longrightarrow x \sim z$*

wachsende, fallende und beschränkte Folgen

Eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt **(monoton) wachsend** wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, genauer gesagt, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man nennt die Folge **streng (monoton) wachsend**, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Analog heißt eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **(monoton) fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt zusätzlich, dass $a_n \neq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge **streng (monoton) fallend**.

Wenn $(\mathbb{K}, \leq)$ total geordnet ist, dann heißt $k \in \mathbb{K}$ eine *obere Schranke*[a] für die Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$, wenn für alle $a \in A$ gilt, dass $a \leq k$.
Die Zahl $k \in \mathbb{K}$ ist eine *obere Schranke* für die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{K}$[b], wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq k$. Wenn eine Menge oder Folge eine obere Schranke hat, dann heißt sie **nach oben beschränkt**.
Ähnlich definiert man *untere Schranke* und *nach unten beschränkt*.

Ist die Menge oder die Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, dann nennt man sie **beschränkt**.

[a] *vgl.* Definition 4.4 (Supremum & Infimum)
[b] *vgl.* Kapitel 4

Definition 2.5 ($\mathbb{R}$ als Grenzwert von Folgen):
Mögliche Konstruktion:

1. *Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, die monoton wachsend und nach oben beschränkt sind*
2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent), wenn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt*
$$a_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \iff b_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
Anders gesagt: beide Folgen haben die gleichen oberen Schranken
3. *$\mathbb{R} := (\mathcal{F}, \sim)$, d. h. man identifiziert äquivalente Folgen und definiert $\mathbb{R}$ als die Menge der **Äquivalenzklassen***

Bemerkung 2.2:
Man fasst diese Konstruktion zusammen, indem man sagt: $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Grenzwerte von monoton wachsenden, beschränkten Folgen aus $\mathbb{Q}$.
Analog dazu ließen sich statt monoton wachsender, nach oben beschränkter Folgen auch monoton nach unten beschränkte Folgen in $\mathbb{Q}$ nehmen.

Es stellt sich heraus, dass die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ eine vernünftige Struktur haben und auf natürliche Weise die Löcher in $\mathbb{Q}$ auffüllen, wenn wir Addition, Multiplikation und Ordnung für $\mathbb{R}$ passend definieren. Passend heißt, dass die Definition für Elementen aus $\mathbb{Q}$ die übliche bleibt und sich auf natürliche Art für Elementen aus $\mathbb{R}$ ergänzt.

Theorem 2.1:
$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *ist ein total geordneter Körper.*

Intervalle

Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nennt man **Intervalle**. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\} && (\textbf{abgeschlossenes Intervall})\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\} && (\textbf{halboffenes Intervall})\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\} && \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\} && (\textbf{offenes Intervall})\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x\} && \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\} && \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\} && \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\} &&
\end{aligned}$$

Wir haben hier die Symbole $-\infty$ (negativ unendlich) und ∞ (positiv unendlich) benutzt. ∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen und liegen nicht in $\mathbb{R}$. Man schreibt ab und zu trotzdem $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und sagt $\mathbb{R}$ **abgeschlossen**[a]. Mit $(\overline{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ kann man aber nicht mehr wie mit einem Körper arbeiten.

[a] *vgl.* Definition 12.6

Bemerkung 2.3:
Eine Menge die beschränkt und abgeschlossen ist bezeichnet man auch als **kompakt**[a]. Ein abgeschlossenes Intervall nennt man daher oft auch **kompaktes Intervall**.

[a] *vgl.* Definition 12.20

Man kann jedes Intervall I „abschließen" (Notation $\overline{I}$) und „öffnen" (Notation I°).

I	$[a,b]$	$(a,b]$	$[a,b)$	(a,b)	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b)$	$[a,\infty)$	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$
$\overline{I}$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b]$	$[a,\infty)$	$[a,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
I°	(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	$(-\infty,b)$	$(-\infty,b)$	(a,∞)	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$

Definition 2.6 (Vorzeichenfunktion):
Sei $\mathbb{K}$ ein total geordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$. Man nennt

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

das ***Vorzeichen*** *von x.*

Definition 2.7 (Betragsfunktion):
Sei $\mathbb{K}$ eine Gruppe oder ein Körper mit einer totalen Ordnung $\leq$. Dann definiert man die ***Betragsfunktion***

$$|x| := x \cdot \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad d.\,h. \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Dabei bedeutet $x < 0$ das $0 \geq x$ und $x \neq 0$.

2.3. Andere Einführungen der reellen Zahlen

Definition 2.8 ($\mathbb{R}$ durch Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen):
Mögliche Konstruktion:

1. *$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ heißt eine* ***Cauchy-Folge*** *(auch* ***Fundamentalfolge*** *genannt), wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$
Sei $\mathcal{CF}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$
2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{CF}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent) wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon n \geq M_\varepsilon \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$$
3. *$\mathbb{R} := (\mathcal{CF}, \sim)$*

Definition 2.9 ($\mathbb{R}$ durch Dedekindsche Schnitte):
Mögliche Konstruktion:

1. *(A, B) heißt* ***Schnitt*** *von $\mathbb{Q}$, wenn $A, B \subset \mathbb{Q}$ mit*
   1.1. *$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$*
   1.2. *für jedes $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq b$*
2. *wenn es $q \in \mathbb{Q}$ gibt mit $a \leq q$ für alle $a \in A$ und $q \leq b$ für alle $b \in B$, dann sagen wir die folgenden Schnitte sind äquivalent*
$$\big(A \setminus \{q\}, B \cup \{q\}\big) \sim \big(A \cup \{q\}, B \setminus \{q\}\big)$$
3. *Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Schnitte in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} := (\mathcal{S}, \sim)$*

Definition 2.10 ($\mathbb{R}$ durch Intervallschachtelungen):
Mögliche Konstruktion:

1. $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $a_n < b_n$ heißt eine ***Intervallschachtelung***, wenn
   1.1. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subset I_n$
   1.2. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Intervall I_n gibt mit Länge $b_n - a_n < \varepsilon$

   Sei $\mathcal{I}$ die Menge der Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$
2. Zwei Intervallschachtelungen $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißen äquivalent, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n \cap J_n \neq \emptyset$
3. $\mathbb{R} := (\mathcal{I}, \sim)$

2.3.1. Nur eine vollständige Erweiterung?

Definition 2.11 (isomorph):
Zwei total geordnete Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ und $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, \leqq)$ heißen ***isomorph****, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ gibt, so dass $\forall a, b \in \mathbb{K}$:*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$
3. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)$

Man schreibt dann $\mathbb{K} \simeq \mathbb{L}$.

Definition 2.12 (vollständig bezüglich einer Ordnung):
Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ total geordnet. Dann heißt $\mathbb{K}$ ***vollständig bezüglich der Ordnung*** $\leq$*, wenn jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{K}$ eine kleinste obere Schranke[a] hat.*

[a] Diese kleinste obere Schranke von M heißt das **Supremum von M** und man schreibt $\sup M$ (*vgl.* Definition 4.4 Supremum & Infimum)

Theorem 2.2:
Es gibt, bis auf Isomorphien, eine eindeutige Erweiterung $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$, die vollständig ist bezüglich der Ordnung $\leq$.

2.4. Eigenschaften

2.4.1. Abzählbarkeit

Theorem 2.3 (Satz von Cantor):
$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Lemma 2.1:

- *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*
- *Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so dass $p < x < q$.*
- *$\mathbb{Q}$ liegt dicht[a] in $\mathbb{R}$, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$. Umformuliert: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.*

[a] *vgl.* Definition 23.4 (Dicht)

2.4.2. Vollständigkeit

Einen ganz wichtigen Bestandteil von Theorem 2.2 möchten wir noch mal betonen.

Korollar 2.2.a:
$(\mathbb{R}, \leq)$ ist vollständig, d. h. jede nicht-leere, beschränkte Menge aus $\mathbb{R}$ hat ein Supremum[a].

[a] *vgl.* Definition 4.4 (Supremum & Infimum)

Definition 2.13 (Folgen-Konvergenz in $\mathbb{R}$):
Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge[a] von Zahlen in $\mathbb{R}$.

- *Die Folge heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m \in \mathbb{N} \colon n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- *Die Folge heißt **konvergent**, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

*Man schreibt $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ und nennt a den **Limes** oder **Grenzwert**.*

[a] *vgl.* Kapitel 4

Theorem 2.4:
Sei $\mathbb{R}$ wie in Definition 2.5. Dann sind äquivalent:

- *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes in $\mathbb{R}$*
- *Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes in $\mathbb{R}$*
- *Jede beschränkte nicht-leere Menge in $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$[a]*
- *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$*

[a] *vgl.* Korollar 2.2.a

Satz 2.1 (Archimedisches Axiom):
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, d. h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. Umformuliert: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_+$ mit $y < x$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $ny > x$.

Satz 2.2 (Satz von Eudoxos):
Zu jedem $\varepsilon > 0$ *gibt es* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Umformuliert: $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$[a].

[a] *vgl.* Definition 4.4 für Notation

3. Komplexe Zahlen

3.1. Etwas Imaginäres

Zusätzlich zu den reellen Zahlen führen wir das Symbol $\imath$ ein und wir vereinbaren:

$$\imath^2 = -1$$

Die kleinste Menge, die $\mathbb{R} \cup \{\imath\}$ umfasst und abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, muss mindestens Zahlen der Form $x + \imath y$ enthalten.

$$\mathbb{R}(\imath) = \{x \boxplus \imath y \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

Man sagt zu $\mathbb{R}(\imath)$ auch $\mathbb{R}$ **adjungiert** $\imath$.
Wir definieren die Addition und Multiplikation wie folgt

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad & (x \boxplus \imath y) \oplus (a \boxplus \imath b) = (x + a) \boxplus \imath(y + b) \\ \text{Multiplikation:} \quad & (x \boxplus \imath y) \odot (a \boxplus \imath b) = (xa - yb) \boxplus \imath(xb + ya) \end{aligned}$$

Man setzt $(\mathbb{C}, +, \cdot) = (\mathbb{R}(\imath), \oplus, \odot)$ und nennt $\mathbb{C}$ die Menge der **komplexen Zahlen**.

Lemma 3.1:
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Definition 3.1 (Realteil, Imaginärteil, Betrag & Argument):
Sei $z \in \mathbb{C}$ und schreibe $z = x + \imath y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *Der **Realteil**:* $\mathrm{Re}(z) = x$
2. *Der **Imaginärteil**:* $\mathrm{Im}(z) = y$
3. *Der **Betrag**:* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. *Das **Argument**:* $\arg(z) =$ *„die Größe des Winkels $\measuredangle(1, 0, z)$ gegen den Uhrzeigersinn gemessen“, wobei $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

Definition 3.2 (komplex Konjugiert):
Für $z \in \mathbb{C}$, mit $z = x + \imath y$ und $x, y \in \mathbb{R}$, schreibt man $\overline{z} = x - \imath y$.
*$\overline{z}$ nennt man das **komplex Konjugierte** von z.*

Lemma 3.2:
Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Es gibt „verschiedene“ Möglichkeiten eine komplexe Zahl zu schreiben:

1. $z = \operatorname{Re}(z) + \imath \operatorname{Im}(z)$
2. Falls $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine eindeutige Zahl $\theta \in [0, 2\pi)$, so dass

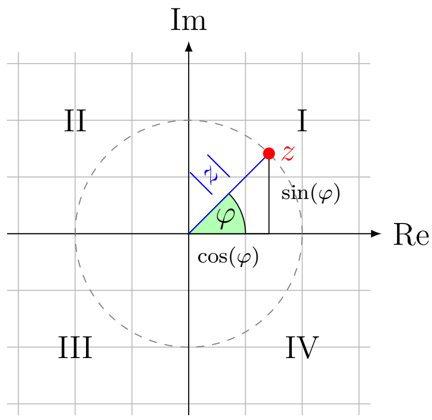
$$\begin{aligned} z &= r e^{\imath\theta} \\ &= |z| \mathrm{e}^{\imath \arg(z)} \\ &= |z| \Big(\cos\big(\arg(z)\big) + \imath \sin\big(\arg(z)\big) \Big) \end{aligned}$$

Wenn $r = |z|$ und $\theta = \arg(z)$, dann heißen (r, θ) die **Polarkoordinaten** von z.

Bemerkung 3.1:

Für $z = \operatorname{Re}(z) + \imath \operatorname{Im}(z)$ lässt sich das Argument $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ (Verschoben!) mit Hilfe des Arcustangens ermitteln, dafür muss nach Quadrant unterschieden werden.

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right), & \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi, & \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) - \pi, & \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$



Lemma 3.3:
Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

1. $|zw| = |z||w|$
2. *für $zw \neq 0$ gilt, dass* $\begin{cases} \arg zw = \arg z + \arg w & \text{für } \arg z + \arg w < 2\pi \\ \arg zw = \arg z + \arg w - 2\pi & \text{für } \arg z + \arg w \geq 2\pi \end{cases}$

- Die Addition zweier komplexer Zahlen in der Gauß-Ebene ist die Addition der Vektoren
- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen lässt sich in der Gauß-Ebene darstellen durch Addition der Argumente und Multiplikation der Beträge

Die Formel von Euler: $\mathrm{e}^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath \sin\varphi$.
Aus der **Euler-Formel** folgt sofort:

$$|\mathrm{e}^{\imath\varphi}| = \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = 1$$

Weiterhin gilt: $\mathrm{e}^{\imath\varphi} = \cosh(\imath\varphi) + \sinh(\imath\varphi)$.

Eine genaue Definition der Exponentialfunktion erfolgt in Abschnitt 6.8.1, die der Trigonometrischen Funktionen erfolgt in Abschnitt 8.6.2 und Abschnitt 8.6.3. Dort werden auch die **Additionstheoreme** aufgelistet.

Bemerkung 3.2:
Für ein $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z) &= \tfrac{1}{2}(z+\overline{z})\\ \mathrm{Im}(z) &= \tfrac{1}{2\imath}(z-\overline{z})\end{aligned}$$

Damit folgt die Definition von Sinus und Cosinus (*vgl.* Definition 8.6):

$$\begin{aligned}\cos(z) &:= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\imath z}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\imath z}+\mathrm{e}^{-\imath z})\\ \sin(z) &:= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\imath z}) = \tfrac{1}{2\imath}(\mathrm{e}^{\imath z}-\mathrm{e}^{-\imath z})\end{aligned}$$

3.2. Topologie und Geometrie in $\mathbb{C}$

Man definiert die **offene Kreisscheibe** für $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ durch:

$$B_r(w) = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z-w| < r\Big\}$$

Einige Figuren kann man einfach mit komplexen Zahlen beschreiben.

- Der *Kreis* um $w \in \mathbb{C}$ mit Radius r:
$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z-w| = r\Big\}$$
- Die Linie mit gleicher Distanz zu w_1 und $w_2 \in \mathbb{C}$ (*Mittelsenkrechte*):
$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z-w_1| = |z-w_2|\Big\}$$
- Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ und $r > |w_1 - w_2|$. Dann beschreibt
$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z-w_1| + |z-w_2| = r\Big\}$$
eine *Ellipse*.
- Für $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, w > 0$ wird eine *Parabel* beschrieben durch
$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\, z = |z-w|\Big\}$$
- Sei $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Die Zahlen $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{C}$ werden durch einen *Kreisbogen* verbunden mittels
$$\Big\{z \in \mathbb{C} \colon \arg\Big(\frac{z-w_1}{z-w_2}\Big) = \varphi\Big\}$$

3.3. Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Definition 3.3 (Polynom):
Eine Funktion $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

*mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ nennt man **Polynom**. Wenn $a_n \neq 0$, dann sagt man: „p hat **Grad** n“. Eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C}$ derart, dass $p(z_1) = 0$ gilt, heißt eine **Wurzel** von p.*

3.3.1. Das Lösen von $z^n = w$

Lemma 3.4:
Die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^n = w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_+$ sind:

$$\left\{ \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + \imath \sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right)\right) : k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\}$$

Achtung: *Für $w \neq 0$ gibt es genau n verschiedene Lösungen.*

Bemerkung 3.3:
Mit der Formel von Euler kann man das ganze auch kürzer schreiben:

$$\left\{ \sqrt[n]{|w|} \cdot \exp\left(\frac{(\arg w + 2k\pi)\imath}{n}\right) : k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\}$$

Bemerkung 3.4:
Um $\cos(\varphi) + \imath \sin(\varphi)$ nicht immer hinschreiben zu müssen gibt es die **cis-Notation**:

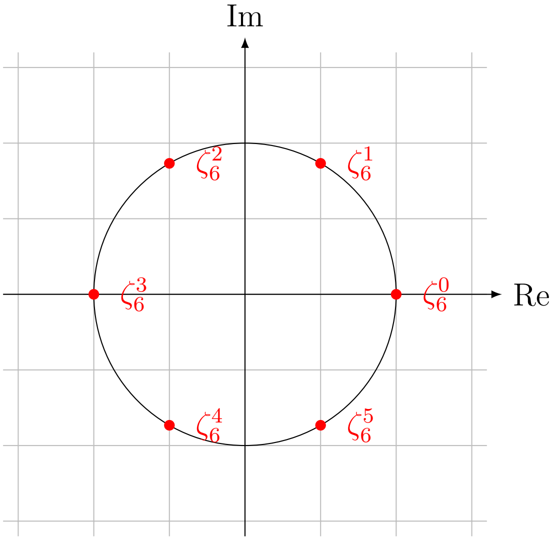
$$\operatorname{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + \imath \sin(\varphi)$$

Definition 3.4 (Einheitswurzeln):
Für $w = 1$ heißen die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, also

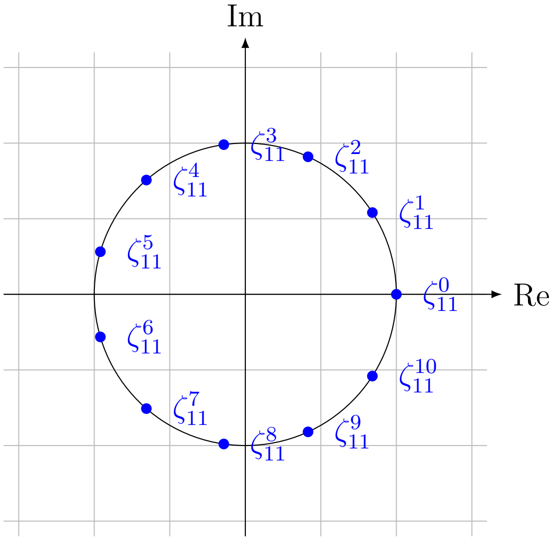
$$\zeta_n^k = e^{\frac{2\pi \imath k}{n}} \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

*die n-te **Einheitswurzel**. Diese ist der n-te Teil des Kreises.*

Einheitswurzeln für $z^6 = 1$



Einheitswurzeln für $z^{11} = 1$



Satz 3.1:
Es sei $w \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^n = w$ eine Lösung c und alle weiteren Lösungen sind $c \cdot \zeta_n^1, \ldots, c \cdot \zeta_n^{n-1}$, wobei ζ_n^k eine n-te Einheitswurzel ist.

3.3.2. Das Lösen von $z^2 + \beta z + \gamma = 0$

Nützlich für das Berechnen der Wurzeln eines quadratischen Polynoms ist die quadratische Ergänzung:

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(z + \tfrac{1}{2}\beta\right)^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma$$

Setzen wir $w = z + \frac{1}{2}\beta$, dann können wir $w^2 = \frac{1}{4}\beta^2 - \gamma$ lösen.
Dazu benutzen wir Lemma 3.4.

3.4. Fundamentalsatz der Algebra

Theorem 3.1 (Fundamentalsatz der Algebra):
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Die Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{3.1}$$

hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Lemma 3.5:
Sei $n \in \mathbb{N}_+$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und sei

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{3.2}$$

Wenn man eine Lösung z_0 von (3.1) hat, d. h. $p(z_0) = 0$, dann gibt es $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = (z - z_0)(z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + b_2 z^{n-3} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1})$$

Korollar 3.1.a:
Sei $n \in \mathbb{N}_+$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und sei p definiert wie in (3.2). Dann gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

3.4.1. Sein und haben

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass man ein Polynom von Grad n schreiben kann als Produkt von n linearen Faktoren. Das heißt, die Wurzeln $z_1, \ldots, z_n$ existieren. Eine ganz andere Frage ist, ob man diese z_i auch explizit berechnen kann. Approximieren und den Limes nehmen wird sicher funktionieren. Wenn man diese Wurzeln aber durch ein algebraisches Verfahren berechnen möchte, wie es die ***pq*-Formel**[1] für Polynome von Grad 2 macht, dann geht das leider selten. Für allgemeine Polynome von Grad 3 kann man durch die **Methode von Cardano**[2] die Wurzeln finden und für allgemeine Polynome von Grad 4 gibt es die **Methode von Ferrari**[3]. Dann hört es auf. Im Allgemeinen hat man für Polynome von Grad 5 und höher keine algebraische Methode um die Wurzeln zu finden:

[1] *vgl.* Bemerkung 3.5
[2] *vgl.* Bemerkung 3.6
[3] *vgl.* Bemerkung 3.7

„Es gibt die Wurzeln, aber man hat sie nicht explizit“. Es gibt sogar einen Satz, der sagt, dass es keine algebraische Formel geben kann.

Bemerkung 3.5 (quadratische Gleichung):
Wir kennen die Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Die Lösungen sind

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bemerkung 3.6 (kubische Gleichung):
Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Die Lösungen der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ sind

$$x_1 = u_+ + u_- \quad x_2 = \omega u_+ + \omega^2 u_- \quad x_3 = \omega^2 u_+ + \omega u_-$$

wobei $\omega := \mathrm{e}^{\frac{2\pi\imath}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\imath}{2}\sqrt{3}$ und $u_\pm := \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}$. Hierbei sind die dritten Wurzeln so gewählt, dass $u_+u_- = -p$ gilt.

Für komplexe Zahlen gibt es mehr als eine dritte Wurzel:
Ist x eine dritte Wurzel von $y \in \mathbb{C}$, dann sind auch ωx und $\omega^2 x$ dritte Wurzeln von y. Da $(-q + \sqrt{q^2 + p^3})(-q - \sqrt{q^2 + p^3}) = (-p)^3$ gilt, können wir u_+ und u_- aber so wählen, dass die Bedingung $u_+u_- = -p$ erfüllt ist.

Sei $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad 3, dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(x)$ normiert ist, also $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Mit der Transformation $x \mapsto x - \frac{a}{3}$ können wir die Gleichung $f(x) = 0$ dann immer in die Form $x^3 + 3px + 2q = 0$ bringen.

Bemerkung 3.7 (quartische Gleichung):
Mit der Transformation $x \mapsto x - \frac{a}{4}$ können wir die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ in die Form $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ bringen.

Sei α eine Lösung der kubischen Gleichung

$$8\alpha^3 - 4p\alpha^2 - 8r\alpha + 4pr - q^2 = 0$$

und sei x eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \alpha = \pm\sqrt{2\alpha - p}\left(x - \frac{q}{2(2\alpha - p)}\right)$$

Dann ist x auch eine Lösung der quartischen Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

3.4.2. Reelle Koeffizienten und komplexe Wurzeln

Lemma 3.6:
Sei $n \in \mathbb{N}_+$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und sei p definiert wie in (3.2). Wenn $p(z_1) = 0$ dann gilt auch $p(\overline{z_1}) = 0$.

3.5. Ungleichungen und $\mathbb{C}$

Lemma 3.7:
Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

1. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$
2. $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(**Dreiecksungleichung**)*

3.6. Geometrische Überlegungen

Lemma 3.8:
Sei K ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$ mit $|w|^2 > ab$ derart, dass

$$K = \{z \in \mathbb{C} \colon az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}$$

Definition 3.5 (gebrochen lineare Abbildung):
Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. Man nennt $f \colon \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

*eine **gebrochen lineare Abbildung**.*
*Sie werden auch **Möbius-Abbildungen** genannt.*

affine Abbildung

In der Geometrie und in der Linearen Algebra, ist eine affine Abbildung (auch *affine Transformation* genannt, insbesondere bei einer bijektiven Abbildung) eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen, bei der **Kollinearität**, **Parallelität** und **Teilverhältnisse** bewahrt bleiben oder gegenstandslos werden. Präziser formuliert:

1. Die Bilder von Punkten, die auf einer Geraden liegen (d. h. kollinear sind), liegen wieder auf einer Geraden (Invarianz der Kollinearität). Dabei können auch alle - aber dann alle und nicht nur einige - Punkte einer Geraden auf einen Punkt abgebildet werden.
2. Die Bilder zweier paralleler Geraden sind parallel, wenn keine der beiden Geraden auf einen Punkt abgebildet wird.
3. Drei verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen (kollineare Punkte), werden so abgebildet, dass das Teilverhältnis ihrer Bildpunkte mit dem der Urbildpunkte übereinstimmt - es sei denn, alle drei werden auf denselben Bildpunkt abgebildet.

Bemerkung 3.8:
Für $\gamma = 0$ ist f eine **affine Abbildung**.

$$f(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$$

Man kann $\mathbb{C}$ mit einem Punkt erweitern. Üblicherweise nennt man diesen zusätzlichen Punkt ∞. Wenn man $\mathbb{R}$ erweitert, nimmt man ∞ und $-\infty$ und kann dann formell rechnen z. B.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \infty$$

Das jetzige ∞ soll jedoch „Unendlich in alle Richtungen“ in $\mathbb{C}$ erfassen. Obwohl dies ein anderes „Unendlich“ ist notiert man üblicherweise dieses letzte Unendlich auch durch ∞. Vielleicht wäre es nützlich dieses „komplexe Unendlich“ $\infty_{\mathbb{C}}$ zu nennen. Dann wäre klar, dass

$$\lim_{z\to\infty_{\mathbb{C}}} \mathrm{e}^{-z}$$

nicht existiert.

Bemerkung 3.9:
Wir definieren $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Wir betrachten f als gebrochen lineare Abbildung für $\gamma \neq 0$ und erweitern f auf $\hat{\mathbb{C}}$, wie in Bemerkung 3.9, zu $f^\star$ durch

$$f^\star(z) = \begin{cases} \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} & \text{für } z \neq -\frac{\delta}{\gamma} \\ \infty & \text{für } z = \frac{\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha}{\gamma} & \text{für } z = \infty \end{cases} \tag{3.3}$$

Auch die Abbildung $f^\star\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ nennt man eine **gebrochen-lineare Funktion**. Auch hier unter der Bedingung, dass $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

Lemma 3.9:
Sei f eine gebrochen lineare Abbildung. Wenn $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Kreis oder eine Gerade ist, dann ist auch $f(E)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\hat{\mathbb{C}}$.

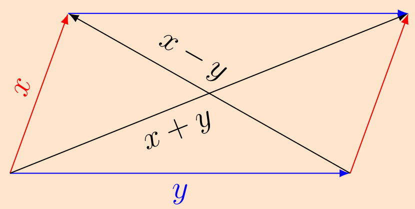
Lemma 3.10:
Die inverse Abbildung[a] zu einer gebrochen linearen Abbildung ist auch eine gebrochen lineare Abbildung.

[a] *vgl.* Definition 8.15 (Umkehrfunktion)

Das Parallelogrammgesetz

Für $z, w \in \mathbb{C}$: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Die Gleichung gilt auch in höheren Dimensionen:
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$



3.7. Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$

Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ lassen sich graphisch in der Ebene darstellen. Für Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ bräuchte man 2×2 reelle Dimensionen für eine ähnliche Darstellung. Trotzdem lassen sich einige einfache Abbildungen graphisch erklären.

- Eine *Verschiebung* in $\mathbb{C}$ lässt sich beschreiben durch $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = z + w$$
- Die *Spiegelung* an der reellen Achse kann man beschreiben durch $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = \overline{z}$$
- Eine *Rotation* um 0 kann man beschreiben durch $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = wz$$
wobei $w \in \mathbb{C}$ so ist, dass $|w| = 1$. Der Winkel der Rotation ist $\arg w$
- Eine *Skalierung* zentriert in 0 wird $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = wz$$
wobei $w \in \mathbb{R}_+$. Der Skalierungsfaktor ist genau w.
Wenn man $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nimmt, dann ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = wz$ eine Kombination einer Rotation mit Winkel $\arg(w)$ und einer Skalierung mit Faktor $|w|$
- Kombinationen von Verschiebungen, Rotationen und Skalierungen heißen **Gleichförmigkeitstransformationen**. Die allgemeine Formel einer solchen Abbildung ist
$$f(z) = \alpha z + \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } \alpha \neq 0$$
Ein solches f bildet eine Gerade auf einer Gerade ab und einen Kreis auf einen Kreis. Nimmt man auch noch eine Spiegelung dazu, bekommt man eine Abbildung der Form $f(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \neq 0$
- Die Spiegelung am Einheitskreis wird eine **Inversion** genannt. Die dazugehörende Abbildung ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$
Manchmal nennt man auch $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ eine Inversion

4. Folgen und Fundamente

4.1. Cauchy-Folgen und Konvergenz

Folge

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ und wird meistens dargestellt durch

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in \mathbb{R}$ vorgeschrieben. Eine Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$.

4.1.1. Monotone Folgen

Definition 4.1 (Teilfolge):
Eine Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt eine ***Teilfolge*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, wenn es eine streng wachsende Funktion*

$$(k \mapsto n_k) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

gibt, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.1:
Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine wachsende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein kleinstes $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 4.1:
Wir schreiben in dem Fall, dass $x_n \uparrow x$ für $n \to \infty$ oder einfach nur $x_n \uparrow x$.

Für eine fallende beschränkte Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ schreiben wir $x_n \downarrow x$, wenn $-x_n \uparrow -x$. Also x ist hier die *größte untere Schranke*[a].

[a] *vgl.* Definition 4.4 (Supremum & Infimum)

4.1.2. Cauchy-Folgen sind konvergente Folgen

Definition 4.2 (Divergenz):
Eine Folge, die nicht konvergent[a] *ist, nennt man* ***divergent****.*

[a] *vgl.* Definition 2.13 (Folgen-Konvergenz in $\mathbb{R}$)

Theorem 4.1:
Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen.

- *Wenn sie konvergent ist, dann ist sie eine Cauchy-Folge*
- *Wenn sie eine Cauchy-Folge ist, dann ist sie konvergent*

Lemma 4.2:
Jede Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

Lemma 4.3:
Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Lemma 4.4:
Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \uparrow x \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Bemerkung 4.2:
Für $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ kann man auch $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ oder kurz $x_n \to x$ schreiben.

Lemma 4.5:
Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge mit einer nach x konvergenten Teilfolge. Dann konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach x.

Korollar 4.1.a:
Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent in $\mathbb{C}$.
Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist Cauchy in $\mathbb{C}$.

Lemma 4.6:
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Bemerkung 4.3:
a_{2n} und a_{2n+1} deckt alle Folgenglieder von a_n ab. Wenn jetzt noch a_{3n} konvergiert, das abwechselnd Folgenglieder von a_{2n} und a_{2n+1} enthält, dann müssen diese gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Lemma 4.7:
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann konvergiert auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4.1.3. Rechenregeln

Lemma 4.8:
Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\Big)$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\Big)$

Bemerkung 4.4:
Man kann auch reelle Folgen wie $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ betrachten. Für eine solche Folge möchte man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ schreiben. Das heißt dann, der Limes existiert nicht (oder existiert nur im uneigentlichen Sinne), und es gibt für jedes $M \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N_M \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > M$ wenn $n > N_M$.

Ähnlich kann man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definieren. Die Rechenregeln aus Lemma 4.8 gelten im Allgemeinen nicht. Es gilt jedoch:

1. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $c > 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = \infty$
2. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$
3. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$
4. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$
5. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}_+$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$

4.1.4. Das Einschließungslemma

Lemma 4.9 (Einschließungslemma):
Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ drei reelle Folgen sind, wobei

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n \quad \textit{und} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.
Das Lemma ist auch bekannt als ***Sandwichlemma****.*

Lemma 4.10:
Sei $k \in \mathbb{N}_+$ und sei $s \in (0,1)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n^k s^n = 0$.

4.2. Analytische Fundamente

4.2.1. Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Definition 4.3 (Minimum & Maximum):
Sei $A \subset \mathbb{R}$.

1. *Wenn es $a \in A$ gibt mit $x \leq a$ für alle $x \in A$, dann nennt man a das* ***Maximum*** *von A*
2. *Wenn es $a \in A$ gibt mit $x \geq a$ für alle $x \in A$, dann nennt man a das* ***Minimum*** *von A*

Man definiert für $a, b \in \mathbb{R}$ das Maximum beziehungsweise das Minimum wie folgt

$$\max(a,b) := \begin{cases} b & \text{falls } a \leq b \\ a & \text{falls } a > b \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{falls } a > b \end{cases} \tag{4.1}$$

Bemerkung 4.5:
Für endlich viele Terme, d. h. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kann man das Maximum (und auch das Minimum) iterativ definieren. Für zwei Terme nimmt man (4.1) und man setzt anschließend für $n > 2$:

$$\max(a_1, \ldots, a_n) := \max\Big(\max(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n\Big)$$

Bemerkung 4.6:
Wenn A mehr als endlich viele Elemente hat, gibt es nicht unbedingt ein Maximum (bzw. Minimum). Das Maximum (bzw. Minimum) einer Menge muss *in der Menge* selbst liegen. Allgemeiner sind die Begriffe Supremum & Infimum.

Definition 4.4 (Supremum & Infimum):
Sei $A \subset \mathbb{R}$.

1. *Das* ***Supremum*** *von A ist definiert durch*

$$\sup A = \text{die kleinste obere Schranke für } A$$

Wenn A nicht nach oben beschränkt ist, dann setzt man $\sup A = \infty$ (also $\sup A$ existiert nicht als eine reelle Zahl und nur, wie man sagt, im uneigentlichen Sinne). Wenn $A = \emptyset$, dann $\sup A = -\infty$.

2. *Das* ***Infimum*** *von A ist definiert durch*

$$\inf A = \text{die größte untere Schranke für } A$$

Bemerkung 4.7:
Wenn A ein Maximum hat, dann gilt $\sup A = \max A$. Wenn A ein Minimum hat, dann gilt $\inf A = \min A$.
Eine beschränkte Menge[a] hat nicht unbedingt ein Maximum (bzw. Minimum). Die Vollständigkeit[b] von $\mathbb{R}$ impliziert aber, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum hat.

[a] Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) heißt **beschränkt**, wenn es $R \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt $|a| < R$. *vgl.* Abschnitt 2.2
[b] *vgl.* Korollar 2.2.a und Theorem 2.2

4.2.2. Limes Superior und Limes Inferior

Definition 4.5 (Limes Superior & Limes Inferior für Folgen):
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge.

1. *Der* ***Limes Superior*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist definiert durch*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

2. *Der* ***Limes Inferior*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist definiert durch*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

Bemerkung 4.8:
Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nicht nach oben beschränkt ist, sagt man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

existiert im *uneigentlichen Sinne*. Das heißt, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht als Zahl. Analog beim Limes Inferior.

Lemma 4.11:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte reelle Folge. Dann existiert $\limsup_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$.

Lemma 4.12:
Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ reelle Folgen sind mit $\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1. $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
2. $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$

4.2.3. Häufungswert und Bolzano-Weierstrass

Definition 4.6 (Häufungswert):
*Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge. Dann heißt h **Häufungswert** für diese Folge, wenn es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = h$.*
***Achtung:** Statt Häufungswert sagt man auch **Häufungspunkt**.*

Theorem 4.2 (Satz von Bolzano-Weierstrass):
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$) hat einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$).

Bemerkung 4.9:
Also besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$) insbesondere auch eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$).

Lemma 4.13:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n$, wenn er in $\mathbb{R}$ existiert, der größte Häufungswert und $\liminf_{n\to\infty} a_n$, wenn er in $\mathbb{R}$ existiert, der kleinste Häufungswert von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

5. Spezielle Funktionen und Grenzwerte

5.1. Funktionen

Definition 5.1 (Funktion):
*Seien A und B zwei Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** $f\colon A \to B$ ist eine Vorschrift, die auf eindeutige Weise jedem Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ zuordnet.*

Man nennt

- *die Menge A den **Definitionsbereich***
- *die Menge B den **Wertebereich***
- *b das **Bild** von a, wenn für $(a, b) \in A \times B$ gilt $f(a) = b$*
- *die Teilmenge $f^{-1}(b) := \{a \in A\colon f(a) = b\}$ das **Urbild** von b*
- *die Menge $f(A) = \{b \in B\colon \exists a \in A\}$ die **Wertemenge***
- *$\mathrm{Graph}(f) = \Big\{\big(a, f(a)\big)\colon a \in A\Big\}$, eine Teilmenge von $A \times B$, den **Graph** der Funktion*

Definition 5.2 (injektive Funktion):
*Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt **injektiv** (eineindeutig), wenn $f(x) = f(y)$ impliziert, dass $x = y$.*
Bei einer injektiven Abbildung hat jedes Urbild <u>höchstens</u> ein Element.
Oftmals auch notiert als $f\colon A \hookrightarrow B$.

Definition 5.3 (surjektive Funktion):
*Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.*
Bei einer surjektiven Abbildung hat jedes Element von B ein nicht-leeres Urbild, also <u>mindestens</u> ein Element.
Oftmals auch notiert als $f\colon A \twoheadrightarrow B$.

Definition 5.4 (bijektive Funktion):
*Eine Abbildung $f\colon A \to B$, die surjektiv und injektiv ist, heißt **bijektiv**.*
Bei einer bijektiven Abbildung hat also jedes Urbild <u>genau</u> ein Element.
Oftmals auch notiert als $f\colon A \leftrightarrow B$.

5.2. Nochmals Polynome

Lemma 5.1:
Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 1$.

1. *Dann ist $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv*
2. *$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist injektiv, dann und nur dann, wenn $n = 1$*

Lemma 5.2:
Angenommen, $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sind alle verschieden. Dann gilt folgendes

1. *Es gibt genau ein Polynom n-ten Grades mit $a_n = 1$, das $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als Nullstellen hat. Wenn $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, dann hat man $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*
2. *Es gibt genau ein Polynom p n-ten Grades mit $p(z_0) = 1$, das $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als Nullstellen hat. Wenn $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, dann hat man $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Folgerung 5.1:
Angenommen, $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sind $n+1$ unterschiedliche, reelle (oder komplexe) Zahlen. Für die reellen (oder komplexen) Zahlen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ gibt es ein Polynom p mit höchstens Grad n so, dass $p(z_i) = f_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

5.3. Rationale Funktionen

Definition 5.5 (rationale Funktion):
Eine ***rationale Funktion*** f besteht aus dem Quotient zweier Polynome p und q. Wenn q die Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$ hat, dann heißt dass:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} &\to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) &:= \frac{p(z)}{q(z)} \end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$. Wenn z_i eine m-fache Nullstelle von q ist, und wenn $p(z_i) \neq 0$, dann nennt man z_i einen ***Pol vom Grad m*** für f.

Satz 5.1:
Seien p und q Polynome mit $q(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k}$ und $z_1, \ldots, z_k$ alle verschieden und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_+$. Dann lässt sich die rationale Funktion f in Definition 5.5 schreiben als

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & \tfrac{c_{1,1}}{(z-z_1)^{n_1}} + \tfrac{c_{1,2}}{(z-z_1)^{n_1-1}} + \cdots + \tfrac{c_{1,n_1}}{(z-z_1)} \\ + & \tfrac{c_{2,1}}{(z-z_2)^{n_2}} + \tfrac{c_{2,2}}{(z-z_2)^{n_2-1}} + \cdots + \tfrac{c_{2,n_2}}{(z-z_2)} \\ + & \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \cdots + \cdots \\ + & \tfrac{c_{k,1}}{(z-z_k)^{n_k}} + \tfrac{c_{k,2}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \cdots + \tfrac{c_{k,n_k}}{(z-z_k)} \\ + & \, r(z) \end{aligned}$$

wobei $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ und r ein Polynom ist mit $\mathrm{Grad}(r) = \mathrm{Grad}(p) - \mathrm{Grad}(q)$, wenn $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad(q)}$. Wenn $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ hat man $r = 0$.

Bemerkung 5.1:
Man nennt diesen Vorgang die **Zerlegung in Partialbrüche**. Aus dieser neuen Darstellung folgt, dass es zum Verständnis einer rationalen Funktion reicht, das Verhalten von einzelnen Polen zu studieren. Der Grund für diesen Aufwand soll, wenn nicht jetzt, spätestens bei der Integration deutlich werden.

Lemma 5.3:
Seien p und q Polynome mit $\mathrm{Grad}(p) \leq \mathrm{Grad}(q) - 1$ so dass p und q keine gemeinsame Nullstelle haben. Sei z_1 eine m-fache Nullstelle von q

$$q(z) = (z - z_1)^m \, \tilde{q}(z)$$

dann gibt es ein Polynom $\tilde{p}$ mit $\mathrm{Grad}(\tilde{p}) \leq \mathrm{Grad}(q) - 2$ und ein $c \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z - z_1)^m \, \tilde{q}(z)} = \frac{\tilde{p}(z)}{(z - z_1)^{m-1} \, \tilde{q}(z)} + \frac{c}{(z - z_1)^m}$$

5.4. Potenzen und Wurzeln

Potenzen

Potenzen mit ganzen Zahlen sind definiert durch

- $n \in \mathbb{Z}_+$: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{-mal}}$ für $z \in \mathbb{C}$
- $n = 0$: $z^0 = 1$ für $z \in \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{Z}_-$: $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Die ersten Erweiterungen sind die Wurzelfunktionen:

- Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann ist $(y \mapsto y^n)\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bijektiv. Dann gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ von $x = y^n$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, dann ist $(y \mapsto y^n)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Dann gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}$ von $x = y^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Die Bijektivität folgt aus der Tatsache, dass die Funktionen monoton wachsend, also injektiv, und surjektiv sind.

Definition 5.6 (Wurzelfunktion):

1. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$ gerade. Dann wird $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch*

$$\sqrt[n]{x} = y, \text{ wenn } y^n = x \text{ und } y \geq 0$$

2. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$ ungerade. Dann wird $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\sqrt[n]{x} = y, \text{ wenn } y^n = x$$

5.4.1. Potenzen mit rationalen Koeffizienten

Definition 5.7 (rationale Potenzen):
Sei $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. *Die Funktion* $\left(x \mapsto x^{\frac{m}{n}}\right) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *wird definiert durch*

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Lemma 5.4 (Potenzgesetze):
Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ *und* $p, q \in \mathbb{Q}$. *Dann gilt:*

1. $x^{p+q} = x^p x^q$
2. $x^{pq} = (x^p)^q$
3. $(xy)^p = x^p y^p$

5.5. Einige Standardfolgen und deren Grenzwerte

Lemma 5.5:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$ *für* $q \in \mathbb{Q}_+$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ *für* $x \in \mathbb{R}_+$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n^m z^n = 0$ *für* $m \in \mathbb{N}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$

Definition 5.8 (Abrundungsfunktion):
Die ***Abrundungs-***, ***Entier-*** oder ***Ganzzahl-funktion***:

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lfloor x \rfloor &\mapsto \sup\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\} \ (\text{die größte Zahl } n \in \mathbb{Z}, \ \text{so dass } n \leq x) \end{aligned}$$

Sie wird auch als ***untere Gaußklammer*** bezeichnet und manchmal als $[\,\cdot\,]$ geschrieben.

Definition 5.9 (Aufrundungsfunktion):
Die ***Aufrundungsfunktion*** oder ***obere Gaußklammer***:

$$\begin{aligned} \lceil \cdot \rceil \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \lceil x \rceil &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{Z} \colon n \geq x\} \ (\text{die kleinste Zahl } n \in \mathbb{Z}, \ \text{so dass } n \geq x) \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2:
Für die Abrundungsfunktion (Definition 5.8) wird oft die Funktion $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$ (*engl.* floor „Boden“) verwendet.

Analog wird für die Aufrundungsfunktion (Definition 5.9) $\text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$ (*engl.* ceiling „Decke“) verwendet.

Es gilt stets $\lceil x \rceil + \lfloor -x \rfloor = 0$. Deshalb erhält man die Aufrundungsfunktion aus der Abrundungsfunktion per

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

Oder einfacher: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

5.6. Wie man ohne Taschenrechner $\sqrt[3]{5}$ berechnen kann

Algorithmus 5.1 m-te Wurzel aus w

Eingabe: $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, w \in \mathbb{R}_+$

```
1: a_0 = w + 1
2: for n ∈ ℕ do
3:     a_{n+1} = (1 - 1/m) a_n + w / (m a_n^{m-1})
4: end for
```

$$a_0 = w + 1$$

for $n \in \mathbb{N}$ **do**

$$a_{n+1} = \left(1 - \tfrac{1}{m}\right)a_n + \frac{w}{m\, a_n^{m-1}}$$

end for

Lemma 5.6:
Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, w \in \mathbb{R}_+$ *und die Folge* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *definiert wie in Algorithmus 5.1. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[m]{w}$.

6. Reihen

6.1. Folgen aus Folgen

Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle oder komplexe Folge ist, kann man daraus eine neue Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konstruieren durch

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

oder netter geschrieben

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Die Folge $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ nennt man eine **Reihe**, die Zahlen a_n die **Glieder** dieser Reihe und s_n die **Partialsummen**.

Bemerkung 6.1:
Oft benutzt man für $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ auch kurzerhand $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Weil man aber auch $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ abkürzt durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, muss oft aus dem Kontext deutlich werden, was genau gemeint ist.

Definition 6.1 (harmonische Reihe):
*Die **harmonische Reihe** ist definiert als*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Bemerkung 6.2:
Die harmonische Reihe ist nicht konvergent.

Definition 6.2 (geometrische Reihe):
*Die **geometrische Reihe** für $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als*

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} z^k\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Bemerkung 6.3:
Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist.
Für den Grenzwert gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 z^k = \frac{a_0}{1-z}$$

Lemma 6.1:

1. *Wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *existiert, dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *ist nicht ausreichend für die Konvergenz der Reihe* $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$

6.2. Konvergenz für Reihen mit positiven Gliedern

Lemma 6.2:
Sei $q \in \mathbb{Q}_+$*. Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ *konvergiert genau dann, wenn* $q > 1$*.*

Bemerkung 6.4:
Anders gesagt: Die Folge $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn $q > 1$.
Oder nochmals anders gesagt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}$ existiert genau dann, wenn $q > 1$. Dies gilt sogar für $q \in \mathbb{R}$ aus $(1, \infty)$.

Definition 6.3 (Riemann-ζ-Funktion):
Die Funktion

$$\left(q \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}\right) : (1, \infty) \to \mathbb{R}$$

heißt ***Riemann-Zeta-Funktion****. Sie wird oft mit* ζ *notiert.*
Sie ist hier definiert auf dem Intervall $(1, \infty)$*. Später*[a] *werden wir sehen, dass diese Funktion sich sogar vernünftig auf* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *definieren lässt.*

[a] *vgl.* Abschnitt 42.2 (Die Riemannsche ζ-Funktion)

Lemma 6.3 (Majorantenkriterium):
Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *reelle Folgen mit* $0 \le a_n \le b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Wenn die Reihe* $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k} b_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ *konvergiert, dann konvergiert die Reihe* $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$
2. *Wenn die Reihe* $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ *divergiert, dann divergiert die Reihe* $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k} b_n\right\}_{k=0}^{\infty}$

6.3. Konvergenz für Reihen mit beliebigen Gliedern

Definition 6.4 (Umordnung):
Die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *heißt eine* ***Umordnung*** von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*, wenn es eine bijektive Abbildung* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $b_n = a_{\sigma(n)}$*.*

Lemma 6.4:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge mit

1. $a_n \geq 0$ *und*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \ell$ *existiert.*

Dann gilt auch für jede Umordnung σ, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \ell$.

Definition 6.5 (unbedingt konvergent):
*Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Die Reihe $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **unbedingt konvergent**, wenn für jede Umordnung σ die Reihe $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Bemerkung 6.5:
Wenn eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent ist, heißt sie **bedingt konvergent**.

Satz 6.1:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und setze $a_n = a_n^+ - a_n^-$ durch

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{wenn } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a_n \geq 0 \\ |a_n| & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases}$$

1. *Die Reihe $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbedingt konvergent genau dann, wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^+\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k^-\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergieren*
2. *Wenn die Reihe $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbedingt konvergent ist, dann gilt für jede Umordnung, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$*

Korollar 6.1.a:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbedingt konvergent ist, dann gilt für jede Umordnung σ, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Definition 6.6 (absolut konvergent):
*Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.*

Satz 6.2:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen.

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist unbedingt konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist absolut konvergent}$$

Korollar 6.2.a:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen.
Wenn $\left\{\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist auch $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Klassifizierung von Reihen

1. konvergent
   1.1. unbedingt konvergent = absolut konvergent
   1.2. bedingt konvergent = konvergent, jedoch nicht absolut
2. divergent

6.4. Zwei Konvergenzkriterien

Lemma 6.5 (Quotientenkriterium):
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$ existiert.

- *Wenn $r < 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent*
- *Wenn $r > 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent*

Lemma 6.6 (Wurzelkriterium):
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Setze $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in [0,\infty]$.

- *Wenn $r < 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent*
- *Wenn $r > 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent*
- *Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent ist, dann gilt $r = 1$*

Bemerkung 6.6:
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Der Limes Superior einer nicht negativen Folge „existiert“ immer in $[0,\infty]$.

Bemerkung 6.7:
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ konvergiert}$$

Sei $a_n > 0$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

Lemma 6.7:
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Dann gilt

$$\left(\exists d < 1\colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq d\right) \Rightarrow \left(\exists c < 1\colon \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq c\right)$$

Bemerkung 6.8:
Wenn eine komplexe Folge nach Quotientenkriterium absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch nach Wurzelkriterium absolut.

6.5. Konvergenz bei alternierenden Gliedern

alternierende Folge

Man nennt eine reelle Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **alternierend**, wenn $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. das Vorzeichen des Produkts zweier aufeinanderfolgender Terme ist negativ.

Lemma 6.8 (Kriterium von Leibniz):
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge mit folgenden Eigenschaften:

1. $a_n > 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$
2. $a_{n+1} \leq a_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dann gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *ist konvergent.*

6.6. Rezeptur

Wie geht man auf eine strukturierte Art die Frage an, ob eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert? Die folgende Anleitung kann dabei helfen.

Rezeptur

1. Frage: Geht $a_n \to 0$?

$$\begin{cases} \text{Nein} & \Rightarrow \text{ Reihe divergent} \\ \text{Ja} & \Rightarrow \text{ fahre fort mit 2} \end{cases}$$

2. Frage: Ist die Reihe absolut konvergent?
   Dazu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ mit einer bekannten Reihe vergleichen:
   2.1. Polynomialer Typ: $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{n^q}$ und ähnlich. Benutze das Majorantenkriterium mit $\frac{c}{n^q}$ und $c > 0$.

$$\begin{cases} |a_n| \geq \frac{c}{n^q} \text{ und } q \leq 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ divergent} \\ |a_n| \leq \frac{c}{n^q} \text{ und } q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ und auch } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \end{cases}$$

   Wenn a_n kein festes Vorzeichen hat und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergiert, fahre fort mit 3.
   2.2. Potenztyp: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ und ähnlich. Berechne r durch (Quotienten- oder) Wurzelkriterium.

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r > 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r = 1 & \Rightarrow \text{ Fahre fort mit 3} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \end{cases}$$

   Bemerkung: $r > 1$ sollte nicht auftreten, denn dann gilt nicht $a_n \to 0$.
   2.3. Anderer Typ: Fahre fort mit 3.
3. Frage: Sind die Glieder alternierend und Leibniz trifft zu?

$$\begin{cases} \text{Ja} & \Rightarrow \text{ Reihe konvergent} \\ \text{Nein} & \Rightarrow \text{ fahre fort mit 4} \end{cases}$$

4. Eigene Kreativität gefragt.

6.7. Summen und Produkte von Reihen

Lemma 6.9:
Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei (komplexe) Folgen und sei $A, B \in \mathbb{C}$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = B$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = A + B$$

Lemma 6.10:
Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei (komplexe) Folgen. Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent sind, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \right)$$

6.8. Potenzreihen

Definition 6.7 (Potenzreihe):
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine (komplexe) Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

eine ***Potenzreihe*** *in z.*

Bemerkung 6.9:
Eigentlich versteht man unter einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

und nennt z_0 das **Zentrum** oder den **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe.
Durch Verschiebung lässt sich aber jede Potenzreihe in den Ursprung legen, weshalb wir der Einfachheit halber ohne Einschränkung $z_0 = 0$ verwenden.

Bemerkung 6.10:
Naiv könnte man sagen, dass so eine Potenzreihe ein Polynom von Grad ∞ wäre. Das ist aber nicht üblich. Den Namen „Polynom“[a] reservieren wir für Funktionen der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \text{ wobei } N \in \mathbb{N}$$

[a] *vgl.* Definition 3.3 (Polynom)

Lemma 6.11:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine (komplexe) Folge und sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe in z. Dann gibt es $R_a \in [0, \infty]$, so dass:

1. *wenn $|z| < R_a$, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent*
2. *wenn $|z| > R_a$, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergent*

Konvergenzradius

Man setze
$$\ell_a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
Dieser Limes ℓ_a existiert in $[0,\infty]$. Das heißt, entweder $\ell_a \in [0,\infty)$ ist eine reelle Zahl, oder das Symbol ∞. Es gilt

$$R_a = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \ell_a = \infty \\ \ell_a^{-1}, & \text{wenn } \ell_a \in \mathbb{R}_+ \\ \infty, & \text{wenn } \ell_a = 0 \end{cases}$$

Dieses R_a heißt der **Konvergenzradius** zu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Bemerkung 6.11:
Die obige Berechnung nennt man auch die **Formel von Cauchy-Hadamard**.
Anstatt des Wurzelkriteriums kann man aber auch das Quotientenkriterium für die Berechnung des Konvergenzradius benutzen. Dies ist in vielen Fällen einfacher z. B. bei Potenzreihen mit nicht-verschwindenden Koeffizienten.
Es gilt $\ell_a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ und $R_a = \ell_a^{-1}$ wie oben.

6.8.1. Exponentialreihe

Definition 6.8 (Exponentialreihe):
*Die **Exponentialreihe** $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch*

$$z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Lemma 6.12:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *hat den Konvergenzradius* $R = \infty$.

Bemerkung 6.12:
Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzradius stetig.

Bemerkung 6.13:
Mit Lemma 6.12 und Bemerkung 6.12 folgt, dass die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist.

Lemma 6.13 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion):
Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

Bemerkung 6.14:
Die Exponentialfunktion besitzt in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen.
Es gilt also $\exp(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Lemma 6.14:
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

- $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
- $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

Bemerkung 6.15:
Mit Bemerkung 6.3 gilt, falls $|x| < 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe).
Für alle $x \in (-\infty, 1)$ gilt $1 + x \leq \exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Satz 6.3 (Die reelle Exponentialfunktion $\exp_{\mathbb{R}}(x)$):

- *Es gilt* $\begin{cases} 0 < \exp_{\mathbb{R}}(x) < 1 & \text{\textit{für} } x < 0 \\ 1 < \exp_{\mathbb{R}}(x) < \infty & \text{\textit{für} } x > 0 \end{cases}$
- $\exp_{\mathbb{R}}$ *ist streng monoton wachsend*
- *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp_{\mathbb{R}}(x)}{x^{\alpha}} = \infty$
- *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_{\mathbb{R}}(x) \cdot x^m = 0$

Satz 6.4:
Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

6.8.2. Binomialreihe

Definition 6.9 (Binomialreihe):
*Die **Binomialreihe** für $s \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ setzt man*

$$\operatorname{bin}(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$$

Lemma 6.15:
Für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$ den Konvergenzradius $R = 1$.

Lemma 6.16:
Für alle $t, s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$\operatorname{bin}(t, z) \operatorname{bin}(s, z) = \operatorname{bin}(s + t, z)$$

Lemma 6.17:
Sei $t, s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{t+s}{n}$$

Bemerkung 6.16:
Eine besondere und oft nützliche Binomialreihe ergibt sich mit $s = -\frac{1}{2}$ und $z = -x$. In diesem Fall lauten die Koeffizienten des Polynoms

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \dots = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \dots$$

Wieso all dieses Getue um die Binomialreihe?

- Wenn $n > s \in \mathbb{N}$, hat man $\binom{s}{n} = 0$ und man bekommt

$$\operatorname{bin}(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n = (1+z)^s$$

- Für $s \in \mathbb{Q}_+$, sagen wir $s = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{N}_+$, bekommt man

$$\Big(\operatorname{bin}(s, z)\Big)^m = \operatorname{bin}(ms, z) = \operatorname{bin}(k, z) = (1+z)^k$$

  Weil für $x \in (-1, 1)$ gilt, dass $\operatorname{bin}(s, x) \in \mathbb{R}$, hat man für ungerade m

$$\operatorname{bin}(s, x) = (1+x)^s \tag{6.1}$$

  Für gerade m findet man $\operatorname{bin}(s, z) = \pm(1+z)^s$. Weil aber $\operatorname{bin}(s, 0) = 1$ gilt, erwartet man auch das (6.1). Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass $z \mapsto \operatorname{bin}(s, z)$ stetig ist auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Aus Stetigkeit und $\operatorname{bin}(s, 0) = 1$ folgt (6.1) auch für m gerade.

- Für $s \in \mathbb{Q}_-$, benutzt man $\operatorname{bin}(s, x) \operatorname{bin}(-s, x) = \operatorname{bin}(0, x) = 1$ und damit folgt aus (6.1) für $s \in \mathbb{Q}_+$ die Gültigkeit der Formel auch für $s \in \mathbb{Q}_-$

- Die Formel in (6.1) kann man benutzen, um x^s zu definieren für $x \in \mathbb{R}_+$ und $s \in \mathbb{C}$. Nämlich
  für $x \in (0, 2)$: $x^s = \operatorname{bin}(s, x - 1)$,
  für $x \in [2, 4)$: $x^s = \operatorname{bin}(2s, x^{\frac{1}{2}} - 1)$,
  für $x \in [4, 8)$: $x^s = \operatorname{bin}(3s, x^{\frac{1}{3}} - 1)$ usw.

  Also allgemein für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$$x \in [2^{n-1}, 2^n) : x^s = \operatorname{bin}(ns, x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

7. Stetigkeit

7.1. Grenzwerte bei Funktionen

7.1.1. Der einfachste Fall

Definition 7.1 (Limes für Funktionen):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man „ℓ ist der **Limes** von *f für x gegen x_0“, notiert als*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

7.1.2. Einseitiger Limes

Definition 7.2 (rechts- & linksseitiger Limes):

1. *Wenn die Funktion $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist auf $(x_0, x_0 + s)$ mit $s > 0$, dann sagt man ℓ ist der* **Limes von f für x von rechts** (oder von oben) *gegen x_0, und man schreibt*

   $$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \ell$$

   wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

2. *Wenn die Funktion $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist auf $(x_0 - s, x_0)$ mit $s > 0$, dann sagt man ℓ ist der* **Limes von f für x von links** (oder von unten) *gegen x_0, und man schreibt*

   $$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \ell$$

   wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Bemerkung 7.1:
Manchmal schreibt man auch

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{oder} \quad \lim_{x\searrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{für} \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \ell$$

also den Limes von rechts/oben bzw.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{oder} \quad \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{für} \quad \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \ell$$

also den Limes von links/unten.

r-Umgebung

- Sei $r \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a-r, a+r)$ heißt **r-Umgebung** von a in $\mathbb{R}$
  Allgemein (auch für höhere Dimensionen): $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \colon |x-a| < r\}$
- Sei $r \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ heißt **punktierte r-Umgebung** von a in $\mathbb{R}$
  Allgemein (auch für höhere Dimensionen): $B_r(a)^* := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x-a| < r\}$

Auch in $\mathbb{C}$ werden (punktierte) Umgebungen[a] benutzt. Statt Intervallen, wie in $\mathbb{R}$, benutzt man kreisförmige Umgebungen:

- Sei $r \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a) := \{x \in \mathbb{C} \colon |x-a| < r\}$ heißt r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$
- Sei $r \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a)^* := \{x \in \mathbb{C} \colon 0 < |x-a| < r\}$ heißt punktierte r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$

[a] *vgl.* Abschnitt 12.1 Topologische Begriffe (Definitionen 12.1 und 12.4)

Bemerkung 7.2:
Sei $f \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) eine Funktion. Wenn $B_r(x_0)^* \cap A$ nicht-leer ist für alle $r > 0$, dann sagt man „ℓ ist der Limes von f für x gegen x_0 innerhalb A“, notiert als

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

7.1.3. Wenn der Limes nicht existiert

Lemma 7.1:
Sei $f \colon \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\ell \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

1. *Der Limes $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$*
2. *Für alle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$*

Lemma 7.2:
Sei $f \colon \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Limes $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht genau dann, wenn es

1. *eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $|f(a_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$, oder es*
2. *zwei Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ gibt, mit $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ für $n \to \infty$, so dass*

$$f(a_n) \to \ell_a \text{ und } f(b_n) \to \ell_b \neq \ell_a \text{ für } n \to \infty$$

7.2. Stetigkeit

Definition 7.3 (stetig in einem Punkt):
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ist ***stetig in a*** $\in \mathbb{R}$*, wenn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ existiert und } \ell = f(a)$$

Bemerkung 7.3:
Benutzt man die Definition vom Grenzwert, dann sieht man, dass stetig in a heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}\colon |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Weil da für $x = a$ eine Trivialität steht: $|f(a) - f(a)| < \varepsilon$, kann man bei Stetigkeit die Bedingung $0 < |x - a|$ weglassen.

Definition 7.4 (stetige Funktion):
Die Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) heißt ***stetig****, wenn sie stetig ist in jedem $a \in A$.*
Achtung: *Zur besseren Unterscheidung bezeichnet man diese gewöhnliche Stetigkeit auch als* ***punktweise Stetigkeit****.*

Definition 7.5 (rechtsseitig & linksseitig stetig):
Die Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) heißt ***rechtsseitig stetig*** *oder* ***rechtsstetig*** *in $a \in \mathbb{R}$, wenn*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell \text{ existiert und } \ell = f(a)$$

Die Funktion f heißt ***linksseitig stetig*** *oder* ***linksstetig*** *in $a \in \mathbb{R}$, wenn*

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell \text{ existiert und } \ell = f(a)$$

Bemerkung 7.4:
Ist f linksseitig stetig und rechtsseitig stetig in a, so ist f auch stetig in a.
Genauso ist f linksstetig und rechtsstetig in a, wenn f stetig in a ist.

7.2.1. Folgenstetig

Definition 7.6 (folgenstetig in einem Punkt):
Die Funktion $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) heißt ***folgenstetig*** *in einem Punkt a, wenn für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.*

Lemma 7.3:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

1. *f ist stetig in a*
2. *f ist folgenstetig in a*

7.2.2. Stetigkeit in $\mathbb{C}$

Alle Lemmata in diesem Kapitel sind auch gültig für Funktionen $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

7.3. Regeln bei Grenzwerten und Stetigkeit

Lemma 7.4:
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_f$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_g$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. *und wenn $\ell_g \neq 0$, dann* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Folgerung 7.1:
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch cf, $f + g$ und fg stetig.

Folgerung 7.2:
Jedes Polynom ist stetig auf $\mathbb{R}$ (und auch auf $\mathbb{C}$).

Folgerung 7.3:
Jede rationale Funktion ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$ (allen $a \in \mathbb{C}$), wo der Nenner ungleich null ist.

Lemma 7.5:
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann gilt:

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = f\big(g(a)\big)$$

Das heißt, auch $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

7.4. Uneigentliche Konvergenz und Asymptoten

7.4.1. Horizontale Asymptoten

Definition 7.7 (horizontale Asymptote):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x nach ∞, notiert als

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}\colon x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
(Alternativ: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ mit $N = |\lfloor M \rfloor| + 1$)
Man sagt: f hat eine ***horizontale Asymptote*** *für $x \to \infty$.*
Analog: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}\colon x < M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

7.4.2. Vertikale Asymptoten

Definition 7.8 (vertikale Asymptote):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ∞ ist der uneigentliche Limes von f für x nach a, notiert als

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

wenn $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$.
Man sagt $-\infty$ ist der uneigentliche Limes von f für x nach a, notiert als

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

wenn $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N$.
In beiden Fällen sagt man, dass f eine ***vertikale Asymptote*** *hat für $x \to a$.*

7.4.3. Schiefe Asymptoten

Definition 7.9 (schiefe Asymptote):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Man sagt, dass f eine ***schiefe Asymptote*** *$ax + b$ hat für $x \to \infty$, wenn*

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$

7.5. Erweiterungen von Limes und Stetigkeit

Definition 7.10 (Limes Superior für Funktionen):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der ***Limes Superior*** *von f für x nach a, notiert als*

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \ell$$

wenn $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \sup\limits_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x) = \ell$.

Definition 7.11 (Limes Inferior für Funktionen):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der ***Limes Inferior*** *von f für x nach a, notiert als*

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \ell$$

wenn $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \inf\limits_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x) = \ell$.

Definition 7.12 (ober- & unterhalb stetig):
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt f ***oberhalb stetig*** *in a, wenn*

$$\limsup_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Die Funktion f heißt ***unterhalb stetig*** *in a, wenn*

$$\liminf_{x \to a} f(x) = f(a)$$

7.6. Folgen der Stetigkeit

Theorem 7.1 (Nullstellensatz):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(a) < 0 < f(b)$$

Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit $f(x) = 0$.
Es gibt sogar eine erste Nullstelle $x_1 \in (a,b)$ und eine letzte Nullstelle $x_2 \in (a,b)$. Das heißt: $a < x_1 \leq x_2 < b$ und

$$\begin{aligned} f(x) &< 0 \quad \text{für } x \in [a, x_1) \\ f(x) &= 0 \quad \text{für } x = x_i \text{ mit } i \in \{1,2\} \\ f(x) &> 0 \quad \text{für } x \in (x_2, b] \end{aligned}$$

Korollar 7.1.a (Zwischenwertsatz):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) = y$.

Theorem 7.2 (Satz von Weierstraß):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

Anders gesagt: auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall nimmt eine stetige Funktion f ihr Minimum und Maximum an.

Korollar 7.2.a:
Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $[c,d] = \big\{f(x)\colon x \in [a,b]\big\}$.

Lemma 7.6:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, falls f stetig in 0.

Lemma 7.7:
Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig und monoton. Sei $x_0 \in [a,b]$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.

- $f(x_0) < x_0 \Rightarrow x_n$ *ist monoton fallend*
- $f(x_0) > x_0 \Rightarrow x_n$ *ist monoton wachsend*
- x_n *konvergiert gegen ein* $\xi \in [a,b]$
- $f(\xi) = \xi$

Lemma 7.8:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist injektiv genau dann, wenn sie streng monoton ist.

Lemma 7.9:
Sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und surjektiv. Dann ist f monoton.

8. Differentialrechnung

8.1. Ableitung einer Funktion

Definition 8.1 (differenzierbar):
*Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $a \in I$, wenn*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R}$$

Man schreibt $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und nennt $f'(a)$ die Ableitung von f in a.

Definition 8.2 (rechts- & linksdifferenzierbar):
*Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $[a, a+\varepsilon) \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt **rechtsdifferenzierbar** in $a \in I$, wenn*

$$f'_+(a) := \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R}$$

*Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $(a-\varepsilon, a] \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt **linksdifferenzierbar** in $a \in I$, wenn*

$$f'_-(a) := \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R}$$

Theorem 8.1:
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in (a,b)$.

1. *Wenn $f'(c) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) > f(c) & \text{für } x \in (c, c+\delta) \\ f(x) < f(c) & \text{für } x \in (c-\delta, c) \end{cases}$
2. *Wenn $f'(c) < 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) < f(c) & \text{für } x \in (c, c+\delta) \\ f(x) > f(c) & \text{für } x \in (c-\delta, c) \end{cases}$
3. *Wenn f ein (lokales) Extremum[a] hat in c, dann gilt $f'(c) = 0$*

[a] *vgl.* Definition 12.18 (Minimum und Maximum)

Bemerkung 8.1:
Die Aussage 3. von Theorem 8.1 ist auch bekannt als das **Kriterium von Fermat** für ein Extremum.

8.2. Höhere Ableitungen

Definition 8.3 (n-mal differenzierbar):
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und setze $f^{(1)} = f'$. Nehme an, dass für $f\colon B_r(a) \to \mathbb{R}$ in $B_r(a)$ die ersten $n-1$ Ableitungen $f^{(1)}, \ldots, f^{(n-1)}$ in $B_r(a)$ existieren. Dann sagt man f ist ***n-mal differenzierbar*** *in a, wenn die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

existiert.

Lemma 8.1:
Sei I ein offenes Intervall und f, g seien n-mal differenzierbar auf I. Dann gilt für die n-te Ableitung in I:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

8.3. Differenzierbarkeit liefert Stetigkeit

Lemma 8.2:
Sei $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in (c,d)$. Wenn f differenzierbar ist in a, dann ist f stetig in a.

Definition 8.4 (Lipschitz-stetig):
Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt ***Lipschitz-stetig*** *in $a \in I$, wenn es $L \in \mathbb{R}_+$ und eine Umgebung $(a-\delta, a+\delta)$ gibt derart, dass*

$$|f(x) - f(a)| \leq L|x-a| \quad \forall x \in I \cap (a-\delta, a+\delta)$$

L heißt eine ***Lipschitz-Konstante*** *bezüglich f in a.*

Definition 8.5 (Lipschitz-Bedingung):
Die Funktion f erfüllt die ***Lipschitz-Bedingung*** *auf dem Intervall I mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}$, wenn*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in I$$

Lemma 8.3:
Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Wenn f differenzierbar ist in $a \in I$, dann ist f Lipschitz-stetig in a.

Bemerkung 8.2:
Eine Verallgemeinerung der Lipschitz-Stetigkeit ist die Hölder-Stetigkeit.
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt **Hölder-stetig zum Exponenten α** genau dann, wenn eine positive reelle Zahl C existiert, so dass für alle $x, y \in U$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich die Lipschitz-Stetigkeit. Für $\alpha = 0$ ist f beschränkt.

8.4. Ableitungsregeln

Für Konstanten gilt:	$f(x) = c$	$\Rightarrow f'(x) = 0$
Für Vielfache gilt:	$f(x) = c \cdot g(x)$	$\Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$
Für Potenzfunktionen gilt:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Lemma 8.4:
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$, so gilt:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ (***Summenregel***)
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (***Produktregel***)
3. *wenn* $g(a) \neq 0$, *dann* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$ (***Quotientenregel***)
4. $(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$ (***Kettenregel***)

8.5. Potenzreihen ableiten

Theorem 8.2:
Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann ist $f(x)\colon B_R(0) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (und auch $B_R(0) \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar) und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ für } x \in B_R(0)$$

Lemma 8.5:
Die folgenden Potenzreihen haben den gleichen Konvergenzradius:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

Lemma 8.6:
Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\left| \frac{x^n - y^n}{x - y} - nx^{n-1} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2} |y - x| \max(|x|, |y|)^{n-2}$$

Korollar 8.2.a:
Innerhalb des Konvergenzradius ist eine Potenzreihe beliebig oft differenzierbar. Außerdem gilt für die n-te Ableitung von $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, dass $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

8.6. Spezielle Potenzreihen

8.6.1. Exponentialfunktion

Vergleiche auch mit Abschnitt 6.8.1.

Wir definieren $\mathrm{e} = \exp(1)$ und $\mathrm{e}^z = \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+w} &= \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \text{ für } w, z \in \mathbb{C} \\ \mathrm{e}^{nz} &= \exp(nz) = \big(\exp(z)\big)^n = (\mathrm{e}^z)^n \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

8.6.2. Trigonometrische Funktionen

Definition 8.6 (Trigonometrische Funktionen):
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann setzt man:

- ***Sinus*** $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $\sin(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}}{2\imath}$
- ***Cosinus*** $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $\cos(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2}$
- ***Tangens*** $\tan\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \cos(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ *mit* $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$
- ***Cotangens*** $\cot\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \sin(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ *mit* $\cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$

Bemerkung 8.3:
Analog zum Cotangens als Kehrwert der Tangensfunktion $\cot(z) = \frac{1}{\tan(z)}$ gibt es noch zwei weitere trigonometrische Funktionen:

- **Sekans** mit $\sec(z) = \dfrac{1}{\cos(z)}$
- **Cosekans** mit $\csc(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$

Weil die Potenzreihe der Exponentialfunktion Konvergenzradius ∞ hat, kann man auch Sinus und Cosinus als Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ schreiben. Es gelten die **Reihendarstellungen**:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

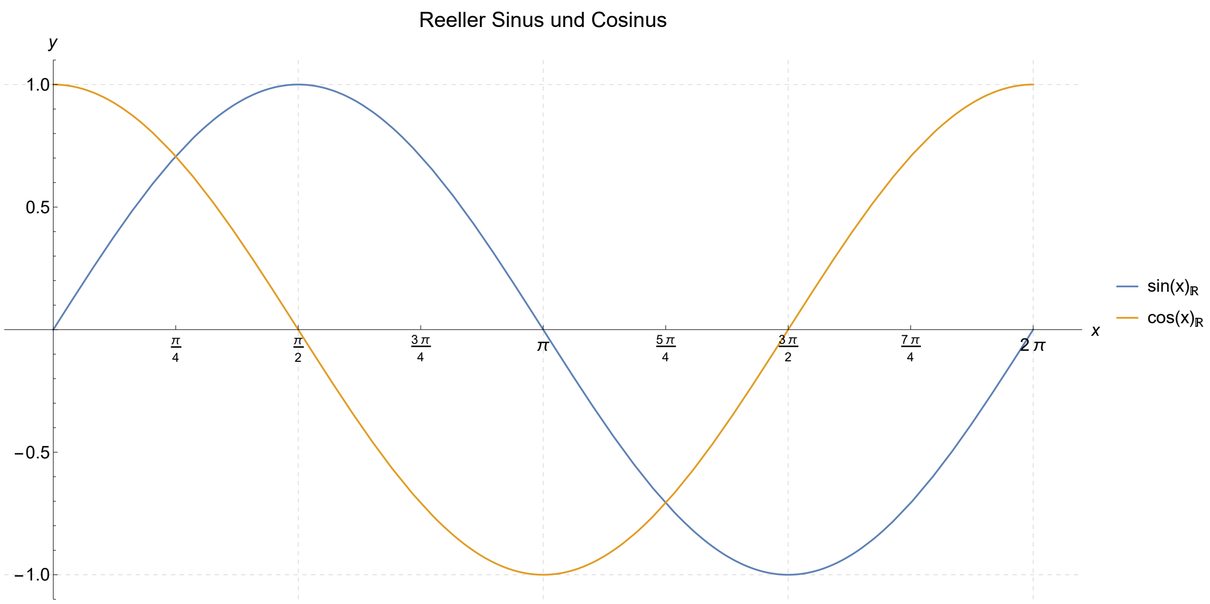
Bemerkung 8.4:
Die Sinus- und Cosinusfunktion sind auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

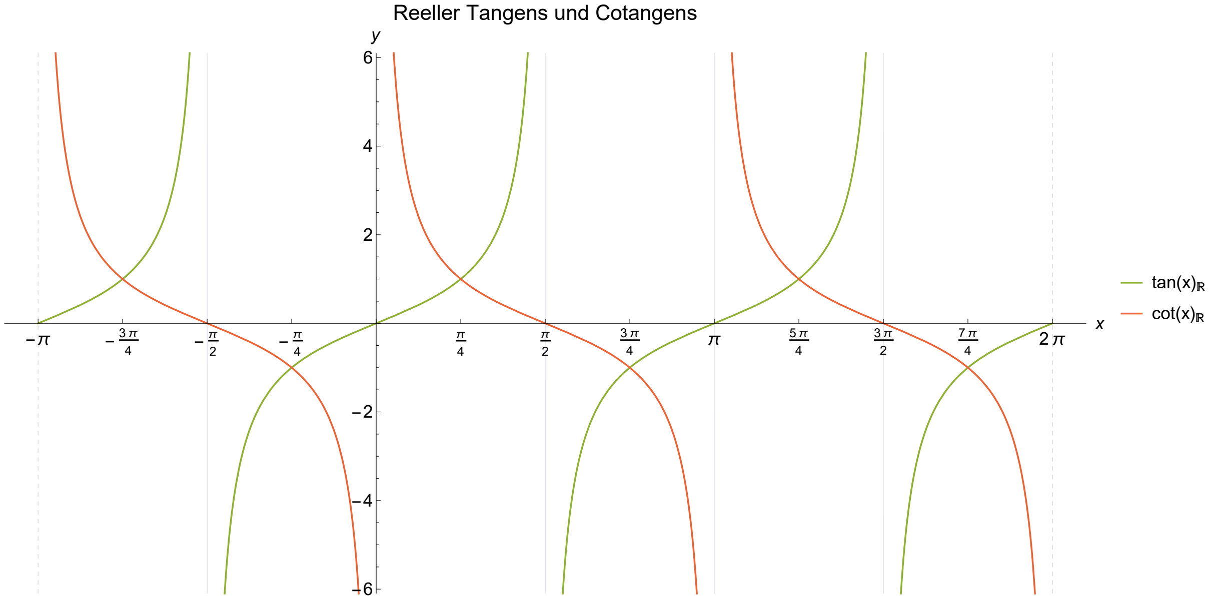
Satz 8.1:
Der Cosinus hat genau eine Nullstelle ξ im Intervall $[0, 2]$.

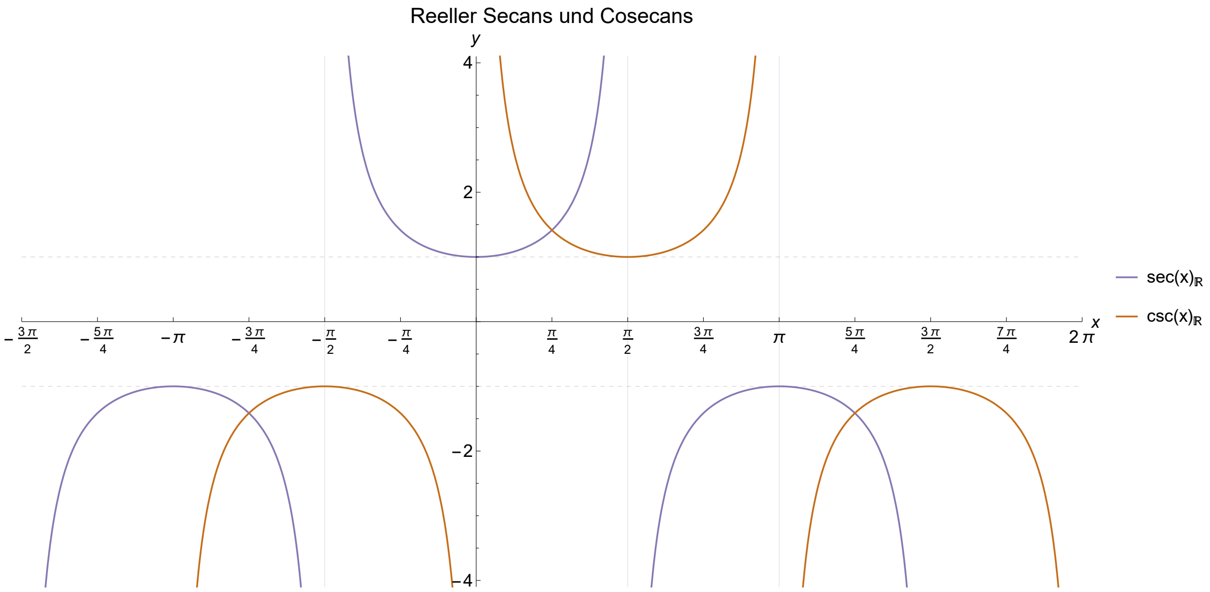
Definition 8.7 (Die Zahl π):
*Die positive reelle Zahl 2ξ, wobei $\xi \in [0, 2]$ und $\cos(\xi) = 0$, heißt **Pi** (Symbol: $\pi := 2\xi$).*

Wichtige Sinus-, Cosinus- und Tangens-Werte

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0° = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\infty_{\mathbb{C}}$







Definition 8.8 (gerade & ungerade Funktion):

1. *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ *heißt* ***gerade****, wenn*
   1.1. *aus* $z \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -z \in \mathbb{D}_f$
   1.2. *für alle* $z \in \mathbb{D}_f$ *gilt* $f(z) = f(-z)$
2. *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ *heißt* ***ungerade****, wenn*
   2.1. *aus* $z \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -z \in \mathbb{D}_f$
   2.2. *für alle* $z \in \mathbb{D}_f$ *gilt* $f(z) = -f(-z)$

Definition 8.9 (Periode):
Die Funktion $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ *heißt* ***periodisch*** *mit Periode* $\omega \in \mathbb{R}_+$*, wenn*

1. *aus* $x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow x + \omega \in \mathbb{D}_f$
2. $f(x+\omega) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{D}_f$

- Seien $T_1 < T_2$ zwei Perioden von f. Dann ist $T_2 - T_1$ auch eine Periode von f
- Jede nichtkonstante, stetige, periodische Funktion f hat eine kleinste (positive) Periode

Satz 8.2:
Besitzt f die Periode ω, so besitzt f auch die Perioden $\pm k\omega$ für $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 8.5:
Die Funktion $\sin(x)$ hat als Perioden $2\pi, 4\pi, \ldots$ und als *kleinste* Periode 2π.

Bemerkung 8.6:
Die komplexe Exponentialfunktion exp besitzt die Periode $\omega = 2\pi\imath$.

Die komplexe Exponentialfunktion exp ist also periodisch, während die reelle Exponentialfunktion $\exp_{\mathbb{R}}$ streng monoton wachsend ist.

8.6.3. Hyperbolische Funktionen

Definition 8.10 (Hyperbolische Funktionen):
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann setzt man:

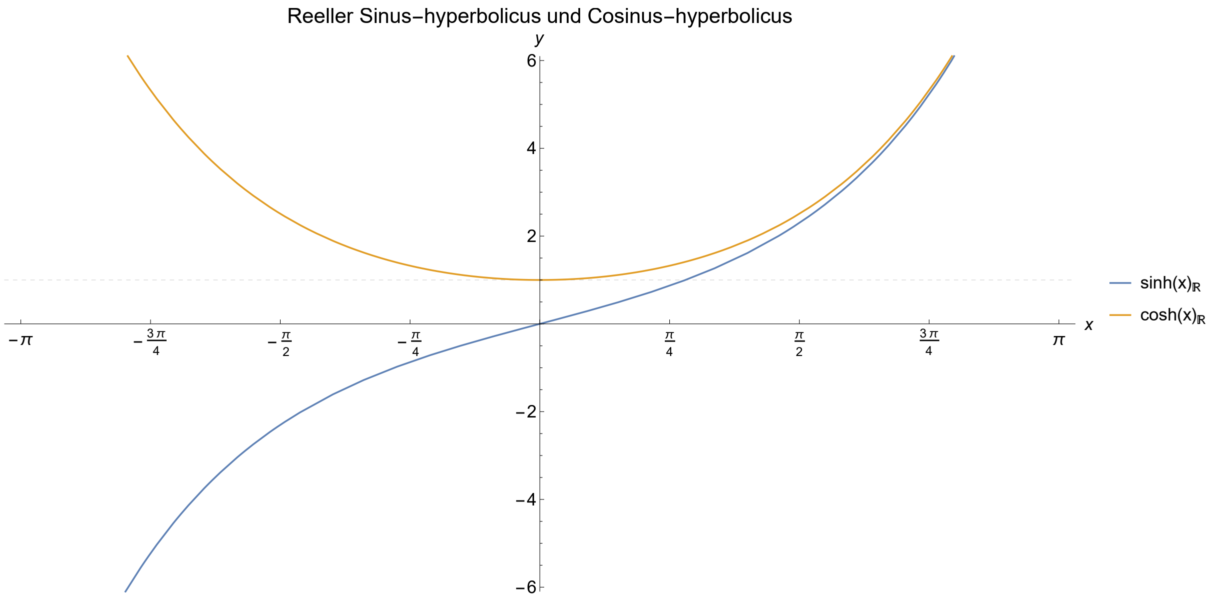
- ***Sinus hyperbolicus*** $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
- ***Cosinus hyperbolicus*** $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
- ***Tangens hyperbolicus*** $\tanh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $\tanh(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$
- ***Cotangens hyperbolicus*** $\coth\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *mit* $\coth(z) = \dfrac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$

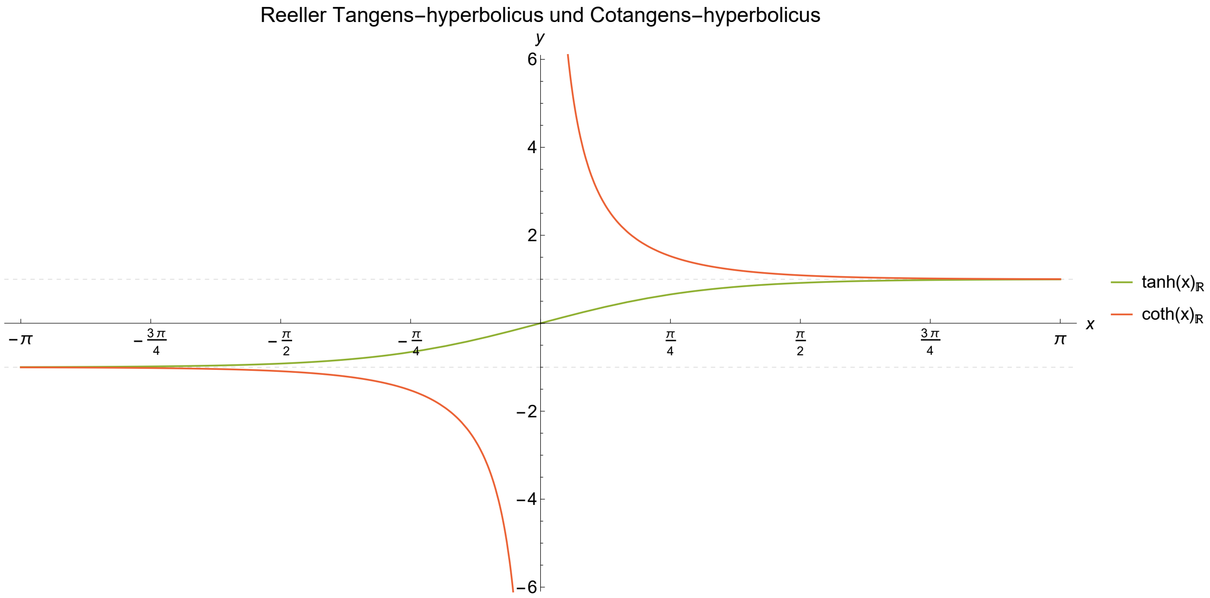
Bemerkung 8.7:

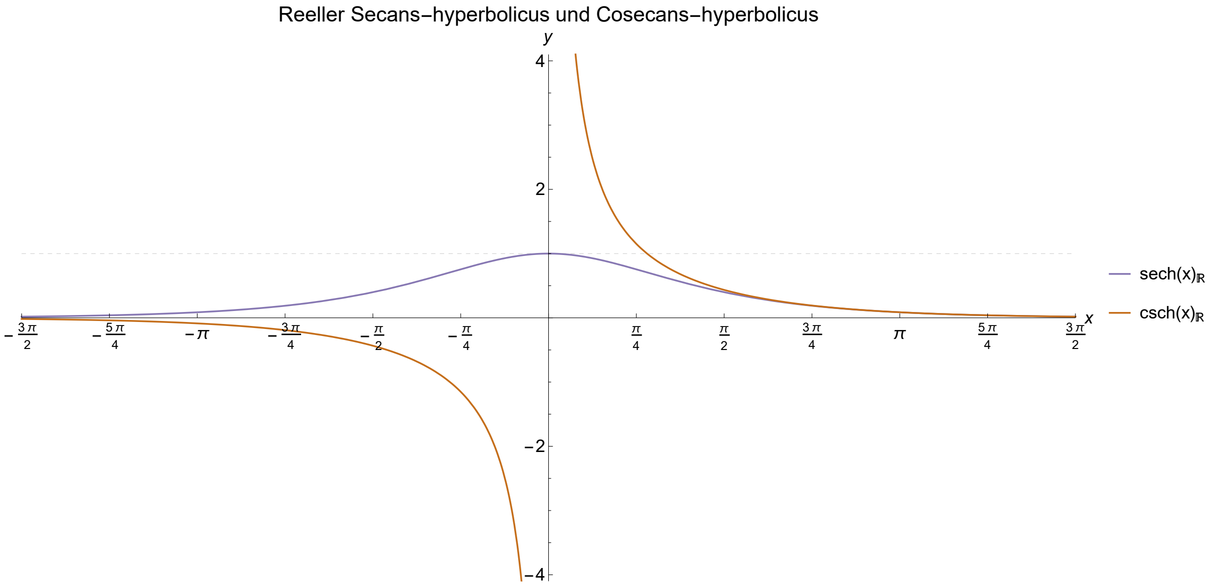
- **Sekans hyperbolicus** mit $\operatorname{sech}(z) = \dfrac{1}{\cosh(z)}$
- **Cosekans hyperbolicus** mit $\operatorname{csch}(z) = \dfrac{1}{\sinh(z)}$

Es gilt die **Reihendarstellung**:

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$


Reeller Sinus-hyperbolicus und Cosinus-hyperbolicus
sinh(x)ℝ
cosh(x)ℝ


Reeller Tangens-hyperbolicus und Cotangens-hyperbolicus
tanh(x)ℝ
coth(x)ℝ


Reeller Secans-hyperbolicus und Cosecans-hyperbolicus
sech(x)ℝ
csch(x)ℝ

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$
$$\cot(x + y) = \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$
$$\coth(x + y) = \frac{1 + \coth(x)\coth(y)}{\coth(x) + \coth(y)}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Formel von Moivre

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(\cos(x) + \imath \cdot \sin(x)\right)^n = \cos(nx) + \imath \cdot \sin(nx)$$

Wichtige Aussagen

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x)$$
$$\sin(x - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(x)$$

$$\sin(x) = -\sin(-x) \text{ (ungerade Funktion)}$$
$$\cos(x) = \cos(-x) \text{ (gerade Funktion)}$$

$$\sinh(z) = -\imath \sin(\imath z)$$
$$\cosh(z) = \cos(\imath z)$$
$$\Rightarrow \exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$$

$$\sinh(z) = -\sinh(-z) \text{ (ungerade Funktion)}$$
$$\cosh(z) = \cosh(-z) \text{ (gerade Funktion)}$$

Wichtige Zusammenhänge

$\lvert\sin(x)\rvert \leq 1 \quad \text{und} \quad \lvert\cos(x)\rvert \leq 1$
$\sin(ax) + \cos(bx) = 2\sin(\frac{at}{2} - \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{at}{2} + \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})$ $\sin(ax) - \cos(bx) = -2\sin(-\frac{at}{2} - \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(-\frac{at}{2} + \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})$ $-\sin(ax) + \cos(bx) = 2\sin(-\frac{at}{2} - \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(-\frac{at}{2} + \frac{bt}{2} + \frac{\pi}{4})$
$\sin(at) \cdot \sin(bt) = \frac{1}{2}\Big(\cos(at - bt) - \cos(at + bt)\Big)$ $\cos(at) \cdot \cos(bt) = \frac{1}{2}\Big(\cos(at - bt) + \cos(at + bt)\Big)$ $\sin(at) \cdot \cos(bt) = \frac{1}{2}\Big(\sin(at - bt) + \sin(at + bt)\Big)$
$a\sin^2(bt) = \frac{1}{2}\Big(a - a\cos(2bt)\Big)$ $a\cos^2(bt) = \frac{1}{2}\Big(a + a\cos(2bt)\Big)$

8.7. Mittelwertsatz und Folgen

Theorem 8.3 (Satz von Rolle):
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist, dass $f_{|(a,b)}\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

Theorem 8.4 (Mittelwertsatz):
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist und dass $f_{|(a,b)}\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Korollar 8.2.a:
Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

1. *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f monoton wachsend auf (a, b)*
2. *Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend auf (a, b)*
3. *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f monoton fallend auf (a, b)*
4. *Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton fallend auf (a, b)*

Korollar 8.2.b:
Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in (a, b)$.

1. *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, c)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (c, b)$, dann hat f ein lokales Maximum in c*
2. *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, c)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (c, b)$, dann hat f ein lokales Minimum in c*

Lemma 8.7:
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a,b)$.

1. *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f ein (lokales) Minimum in x_0*
2. *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f ein (lokales) Maximum in x_0*

Folgerung 8.1 (Zwischenwertsatz für die Ableitung):
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a < b$. Dann gibt es zu jedem γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ eine Stelle $c \in [a,b]$ mit $f'(c) = \gamma$.

Satz 8.1 (Die Regel von L'Hôspital, einfache Fassung):
Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(c) = g(c) = 0$. Für ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) \neq 0$ gilt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Satz 8.2 (Die Regel von L'Hôspital):
Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Angenommen $\lim\limits_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$.[a]
Wenn $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow a} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty$, so ist

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Analog für $\lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$.

[a] *vgl.* Korollar 8.6.a

Definition 8.11 (konvex):
Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt ***konvex****, wenn für alle $x, y \in (a,b)$ und $\theta \in [0,1]$ gilt*

$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Eine Funktion heißt ***streng konvex*** *oder* ***strikt konvex****, wenn die Ungleichung im strengen Sinn ($<$ statt $\leq$) und für $x \neq y$ mit $\theta \in (0,1)$ gilt.*

Definition 8.12 (konkav):
Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt ***konkav****, wenn für alle $x, y \in (a,b)$ und $\theta \in [0,1]$ gilt*

$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \geq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Eine Funktion heißt ***streng konkav*** *oder* ***strikt konkav****, wenn die Ungleichung im strengen Sinn ($>$ statt $\geq$) und für $x \neq y$ mit $\theta \in (0,1)$ gilt.*

Definition 8.13 (Epigraph):
Die Menge aller Punkte einer reellwertigen Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, die auf oder über ihrem Graphen liegen, bezeichnet man mit ***Epigraph****:*

$$\operatorname{epi} f := \Big\{(x,\mu) \in X \times \mathbb{R}\colon f(x) \leq \mu\Big\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

Definition 8.14 (Hypograph):
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Der ***Hypograph*** *der Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$\operatorname{hypo} f := \Big\{(x,\mu) \in X \times \mathbb{R}\colon \mu \leq f(x)\Big\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

Lemma 8.8:
Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konvex.

Lemma 8.9:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist konvex genau dann, wenn

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \text{ für alle } x,y \in I$$

Satz 8.3 (Jensen'sche Ungleichung):
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex und $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für alle $x_1,\dots,x_n \in I$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Lemma 8.10 (Ungleichung vom arithmetischen & geometrischen Mittel):
Für $x,y \geq 0$ gilt, dass $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
Für $x_1,\dots,x_n \geq 0$ gilt, dass $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$

8.8. Die Umkehrfunktion

Definition 8.15 (Umkehrfunktion):
Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f^{\text{inv}}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ eine ***Umkehrfunktion*** *zu f, wenn*

$$f^{\text{inv}} \circ f(x) = x \text{ für alle } x \in I$$

Hier setzt man $f(I) = \Big\{y \in \mathbb{R}\colon \exists x \in I \text{ mit } y = f(x)\Big\}$.

Theorem 8.5:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. *Wenn f stetig und streng monoton ist, dann ist $J = \{f(x)\colon x \in I\}$ ein Intervall und es gibt eine Umkehrfunktion $f^{inv}\colon J \to I$. Diese Umkehrfunktion f^{inv} ist stetig und streng monoton.*
2. *Wenn außerdem f differenzierbar ist in $\tilde{x} \in I^{\circ}$ und $f'(\tilde{x}) \neq 0$, dann ist f^{inv} differenzierbar in $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ und es gilt*

$$(f^{inv})'(\tilde{y}) = \frac{1}{f'(\tilde{x})}$$

Lemma 8.11:
Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig und bijektiv.

- *f^{inv} ist streng monoton steigend genau dann, wenn f streng monoton steigend ist*
- *Für jedes f existiert ein $x \in \mathbb{R}^+$, so dass $f^{inv}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$*

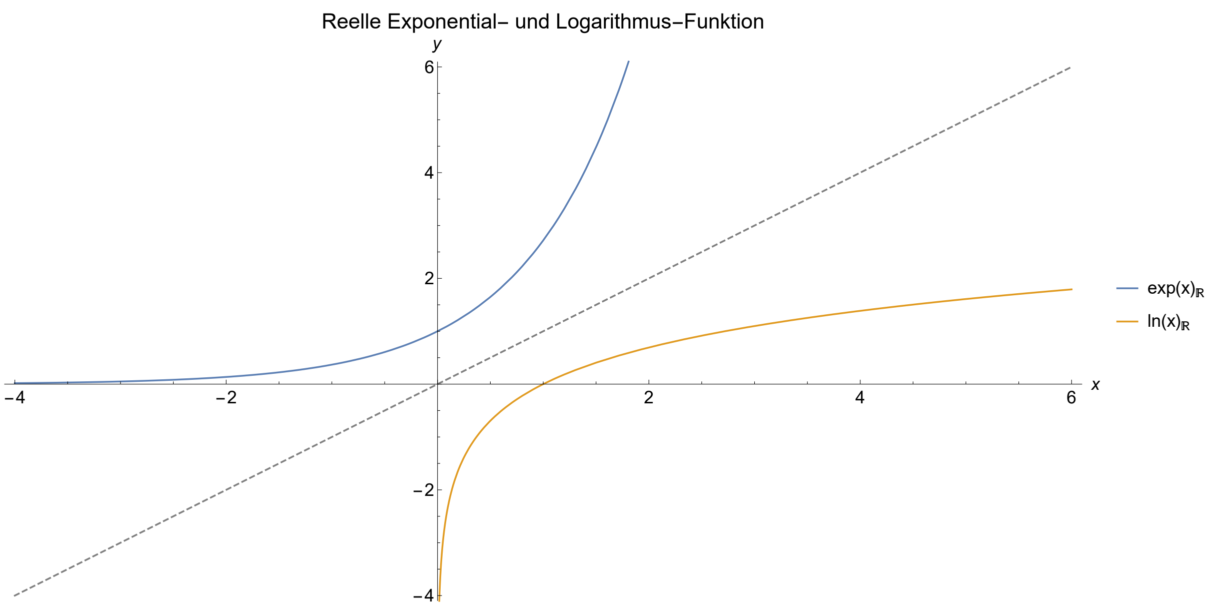
Lemma 8.12:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

- *f ist konvex in $I \iff \forall x, y \in I\colon f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$*
- *f ist konvex und streng monoton wachsend $\Rightarrow (-f^{inv})\colon f(I) \to \mathbb{R}$ ist konvex*

8.8.1. Der Logarithmus

Definition 8.16 (natürlicher Logarithmus):
Der ***natürliche Logarithmus*** wird definiert als

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mit } \ln(x) = \exp^{inv}(x)$$



Bemerkung 8.8:
Der Konvergenzradius der Logarithmusfunktion ist $R = 1$.
Es gilt die **Reihendarstellung**:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Lemma 8.13 (Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion):
Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{R}$ gilt $a^z = \exp(z \ln a)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a^0 &= \exp(0 \ln a) = \exp(0) = 1 \\
a^1 &= \exp(1 \ln a) = \exp(\ln a) = a \\
a^z a^w &= \exp(z \ln a)\exp(w \ln a) = \exp\big((z+w)\ln a\big) = a^{z+w} \\
a^z b^z &= \exp(z \ln a)\exp(z \ln b) = \exp(z \ln a + z \ln b) = \exp\big(z \ln(ab)\big) = (ab)^z
\end{aligned}$$

Bemerkung 8.9:
Für $x > 1$ gilt $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$.
(*vgl.* mit Bemerkung 6.15 und Satz 6.3)

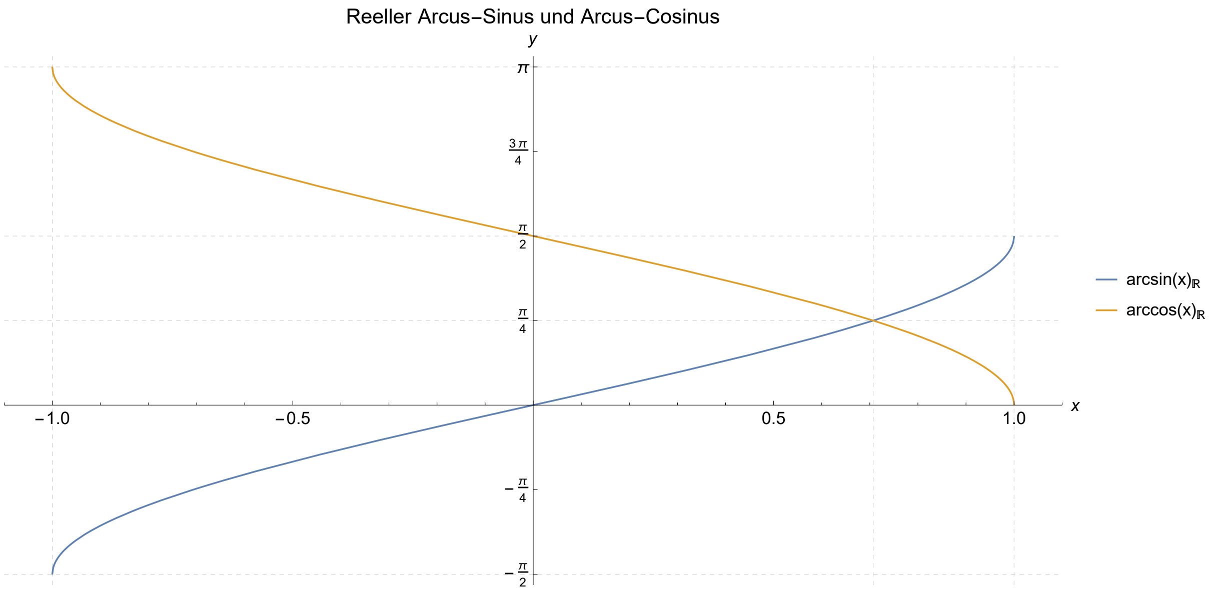
8.8.2. Die zyklometrischen Funktionen oder Arcusfunktionen

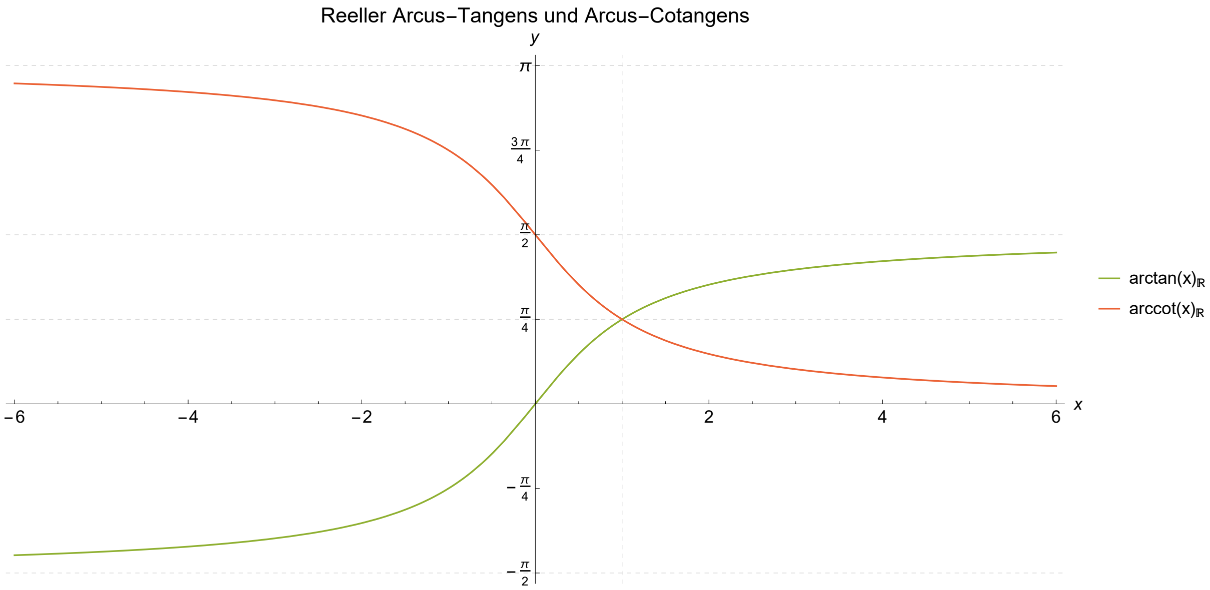
Definition 8.17 (Arcusfunktionen):

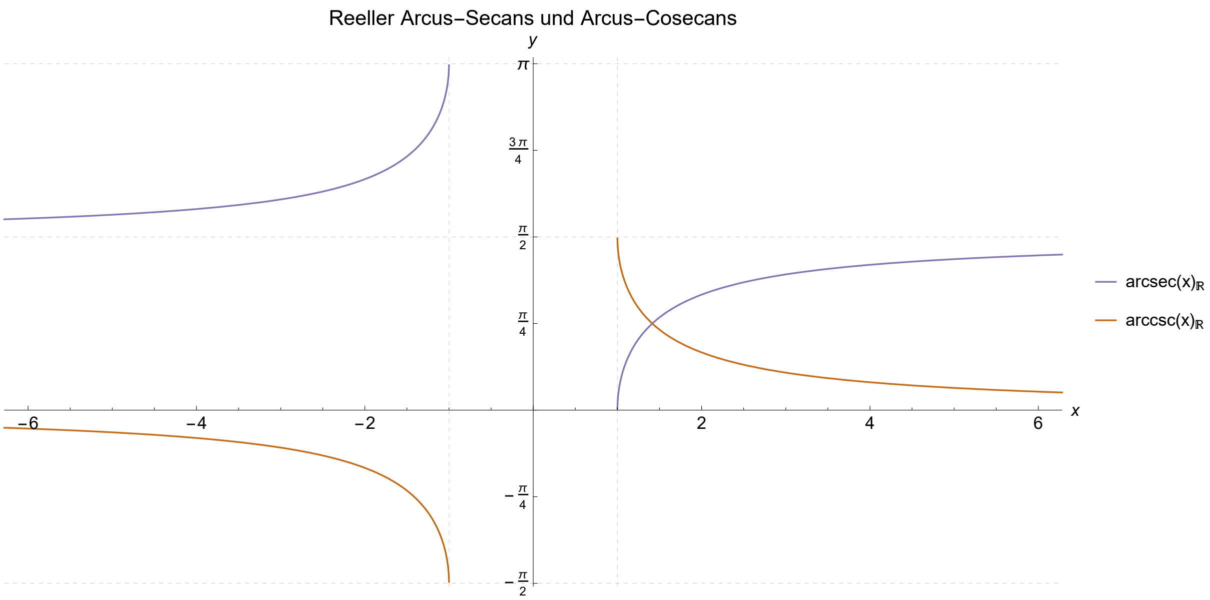
- ***Arcussinus*** $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *mit* $\arcsin(x) = \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{inv}(x)$
- ***Arcuscosinus*** $\arccos\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ *mit* $\arccos(x) = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{inv}(x)$
- ***Arcustangens*** $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $\arctan(x) = \left(\tan_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{inv}(x)$
- ***Arcuscotangens*** $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{arccot}(x) = \left(\cot_{|(0,\pi)}\right)^{inv}(x)$

Bemerkung 8.10:

- **Arkussekans** mit $\operatorname{arcsec}(x) = \left(\sec_{|(0,\pi)}\right)^{\mathrm{inv}}(x)$
- **Arkuscosekans** mit $\operatorname{arccsc}(x) = \left(\csc_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{\mathrm{inv}}(x)$


Reeller Arcus–Sinus und Arcus–Cosinus
y
π
3π/4
π/2
π/4
−π/4
−π/2
x
−1.0
−0.5
0.5
1.0
arcsin(x)ℝ
arccos(x)ℝ


Reeller Arcus–Tangens und Arcus–Cotangens
y
π
3π/4
π/2
π/4
−π/4
−π/2
x
−6
−4
−2
2
4
6
arctan(x)ℝ
arccot(x)ℝ


Reeller Arcus–Secans und Arcus–Cosecans
y
π
3π/4
π/2
π/4
−π/4
−π/2
x
−6
−4
−2
2
4
6
arcsec(x)ℝ
arccsc(x)ℝ

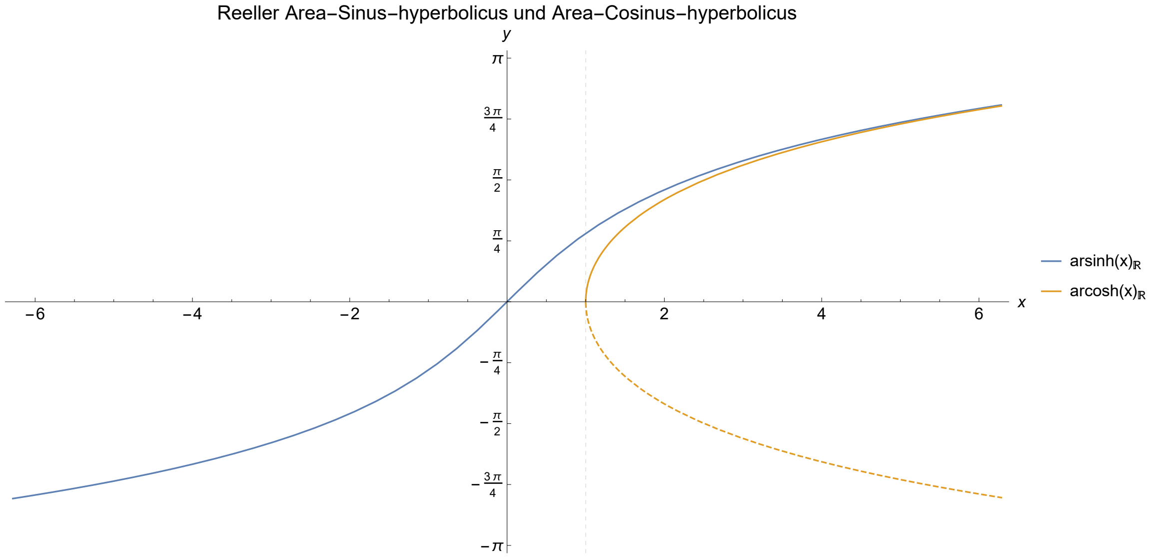
8.8.3. Die Areafunktionen

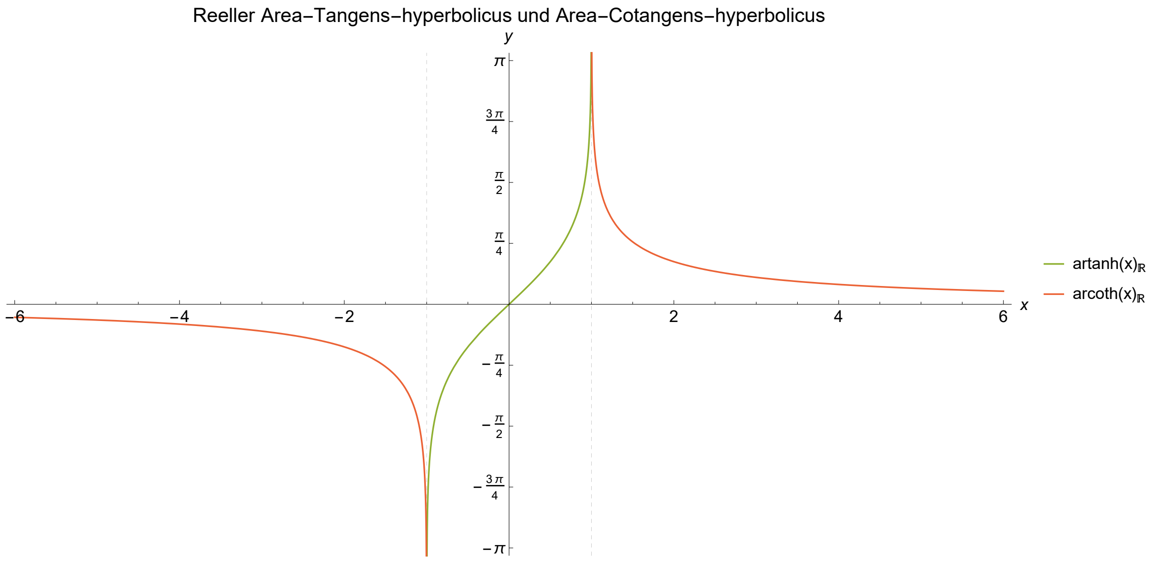
Definition 8.18 (Areafunktionen):

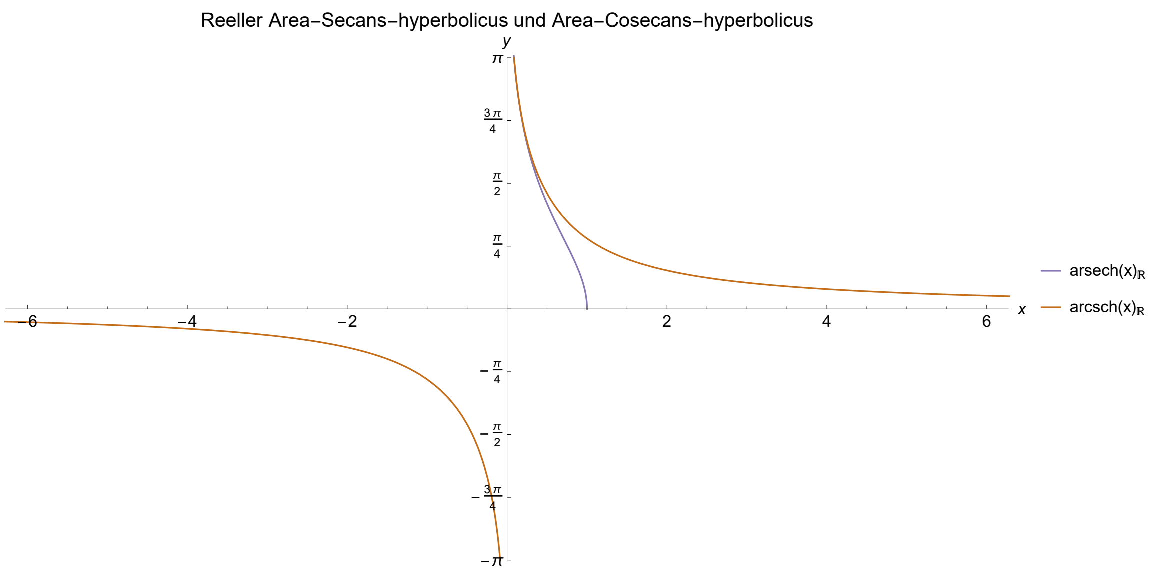
- ***Areasinus hyperbolicus*** $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- ***Areacosinus hyperbolicus*** $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
- ***Areatangens hyperbolicus*** $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- ***Areacotangens hyperbolicus*** $\operatorname{arcoth}\colon \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Bemerkung 8.11:

- **Areasekans hyperbolicus** mit $\operatorname{arsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
- **Areacosekans hyperbolicus** mit $\operatorname{arcsch}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$







Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(ax)$	$a\cos(ax)$	$\cos(ax)$	$-a\sin(ax)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{x^2+1}$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\coth(x)$	$1-\coth^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\forall x \in (-1,1)\colon \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\colon \frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sin(ax)$	$-\frac{\cos(ax)}{a}$	$\cos(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a}$
$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$x\operatorname{arsinh}(x)-\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x\operatorname{arsinh}(x)-\sqrt{x^2+1}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\cot(x)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$
$\arctan(x)$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\operatorname{arccot}(x)$	$x\operatorname{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\coth(x)$	$\ln(\lvert\sinh(x)\rvert)$
$\operatorname{artanh}(x)$	$x\operatorname{artanh}(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x\operatorname{arcoth}(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$

8.9. Taylorpolynome

8.9.1. Aussagen und Heuristik

Theorem 8.6 (Satz von Taylor):
Sei I ein Intervall, $a \in I^{\circ}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Nehme an, die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist n-mal differenzierbar in I°, und setze

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{8.1}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Korollar 8.6.a:
Sei I ein Intervall und $a \in I^{\circ}$. Nehme an, die Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sind n-mal differenzierbar in I° und

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Falls $g^{(n)}(a) \neq 0$, gilt[a]

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

[a] *vgl.* Sätze 8.1 und 8.2 (Die Regel von L'Hôspital)

Theorem 8.7 (Satz von Taylor mit dem Restglied von Lagrange):
Sei I ein Intervall, $a \in I^{\circ}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Nehme an, die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist $(n+1)$-mal differenzierbar in I° und sei p_n wie in (8.1). Dann gibt es θ_x zwischen x und a, so dass

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

8.9.2. Beweis des Taylorschen Satzes

Lemma 8.14:
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es für jedes $x \in (a,b)$ ein $\xi_x \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f'(\xi_x)}{n(\xi_x - a)^{n-1}}$$

8.10. Taylorreihen

Lemma 8.15:
Sei I ein offenes Interval in $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Wenn es $c, M \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq cM^n \text{ für alle } x \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \text{ für } x \in I$$

9. Integralrechnung

9.1. Motivation

Eigenschaften für Flächeninhalte

Wir wollen nun den Flächeninhalt unter einer positiven Funktion definieren und listen erst mal einige Eigenschaften auf, die wir haben möchten.

1. Wenn f eine konstante Funktion ist, wollen wir den Flächeninhalt wie beim Rechteck haben. Für $f(x) = h \geq 0$ wäre das $A = h(b-a)$.

Für allgemeine Funktionen möchte man die folgenden Eigenschaften:

2. Nehmen wir an, wir haben

$$\{x_i\}_{i=1}^n \subset (a,b) \text{ mit } a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

   Wenn A_i der Flächeninhalt von $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ ist und A der von $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \leq x \leq x_n \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$, dann wollen wir, dass

$$A = A_1 + \cdots + A_{n-1}$$

3. Auch wollen wir, dass wenn $f(x), g(x) \geq 0$ und $x \in [a,b]$ gilt, für die dazugehörenden Flächeninhalte gilt

$$A_{f+g} = A_f + A_g$$

   Für eine positive Funktion h soll A_h der Flächeninhalt sein von

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \leq x \leq x_n \text{ und } 0 \leq y \leq h(x)\right\}$$

   Insbesondere sollten der Flächeninhalt des Gebietes zwischen f und $f+g$ und der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und g gleich sein.

9.2. Riemann-Integrale

9.2.1. Definition für Treppenfunktionen

Definition 9.1 (Treppenfunktion):
Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt eine ***Treppenfunktion****, wenn es $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}$ gibt mit*

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

und $\{h_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} &f(x) = h_i \text{ für } x \in (x_i, x_{i+1}) \text{ und } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ &f(x) = 0 \text{ für } x < x_1 \\ &f(x) = 0 \text{ für } x > x_{n+1} \end{aligned}$$

Bemerkung 9.1:
Man bemerke, dass f nicht festgelegt wird für $x \in \{x_i\}_{i=1}^{n+1}$. Wichtig ist aber, dass diese Menge nur endlich viele Stellen enthält. Die Menge $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a,b]$.

Definition 9.2 (Riemann-Integral für Treppenfunktionen):
Sei f eine Treppenfunktion. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) h_i$$

Bemerkung 9.2:
Wir haben vorhin von Flächeninhalten geredet und positive Funktionen betrachtet. In Definition 9.2 sind auch negative Werte h_i erlaubt und dann ist „Flächeninhalt“ nicht länger zutreffend.

Satz 9.1:
Wenn $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beides Treppenfunktionen sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\lambda f + \mu g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 9.2:
Wenn $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beides Treppenfunktionen sind und $f(x) \le g(x)$ auf $[a,b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

9.2.2. Definition für allgemeinere Funktionen

Definition 9.3 (Unter- & Obersumme):
Die $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Dann heißt $m \in \mathbb{R}$ eine **Untersumme** bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $t_{\text{unten}}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$t_{\text{unten}}(x) \leq f(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b t_{\text{unten}}(x)\,\mathrm{d}x = m$$

- *Dann heißt $M \in \mathbb{R}$ eine **Obersumme** bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $t_{\text{oben}}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$f(x) \leq t_{\text{oben}}(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b t_{\text{oben}}(x)\,\mathrm{d}x = M$$

Lemma 9.1:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$. Dann gilt $m \leq M$.

Definition 9.4 (Riemann-Integral):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und seien m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$.

- *Man definiert das **obere Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\Big\{M \in \mathbb{R}\colon M \text{ ist eine Obersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b]\Big\}$$

- *Man definiert das **untere Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\Big\{m \in \mathbb{R}\colon m \text{ ist eine Untersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b]\Big\}$$

- *Falls oberes Integral und unteres Integral existieren in $\mathbb{R}$ und*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

  *dann heißt f **Riemann-integrierbar** auf $[a,b]$. Dann definiert man das **Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bemerkung 9.3:
Weil für jede Untersumme m und Obersumme M bezüglich f auf $[a,b]$ gilt $m \leq M$, folgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bemerkung 9.4:
Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, falls $\operatorname{Re} f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,\mathrm{d}x + \imath \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Theorem 9.1 (Summen- und Faktorregel):
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und nehmen wir an $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. *Angenommen f und g sind integrierbar auf $[a,b]$. Dann ist $\lambda f + \mu g$ integrierbar auf $[a,b]$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. *Sei $c \in (a,b)$. Es gilt: f auf $[a,b]$ ist integrierbar, dann und nur dann, wenn f auf $[a,c]$ und f auf $[c,b]$ integrierbar ist. Außerdem gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. *Wenn f und g integrierbar sind auf $[a,b]$ und $f(x) \leq g(x)$ gilt für $x \in [a,b]$, dann gilt auch*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

9.3. Integrierbare Funktionen

Satz 9.3:
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Es existiert eine Obersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach oben beschränkt ist auf $[a,b]$.*
- *Es existiert eine Untersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach unten beschränkt ist auf $[a,b]$.*

Bemerkung 9.5:
Bemerke, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bedeutet, dass für jedes $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \in \mathbb{R}$. Also können $\pm\infty$ nicht als Bild auftreten. Das heißt selbstverständlich nicht, dass f auf $[a,b]$ beschränkt sein muss. Wenn wir aber f Riemann-integrierbar haben möchten, dann sagt Satz 9.3, dass Beschränktheit notwendig ist.

Satz 9.4:
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Obersumme $M \in \mathbb{R}$ und eine Untersumme $m \in \mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$ gibt mit $M - m < \varepsilon$.

Theorem 9.2:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

stückweise monoton

Die Funktion f heißt **stückweise monoton** auf $[a,b]$, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ gibt derart, dass $f|_{[x_i,x_{i+1}]}$ für $i \in \{0,\ldots,n\}$ monoton ist.

Korollar 9.2.a:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise monotone Funktion. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

Lemma 9.2:
Sei $a < b$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion mit $f\big([a,b]\big) = [c,d]$. Dann gilt

- *Wenn M eine Obersumme für f auf $[a,b]$ ist, dann ist $(bd - ca) - M$ eine Untersumme für f^{inv} auf $[c,d]$*
- *Wenn m eine Untersumme für f auf $[a,b]$ ist, dann ist $(bd - ca) - m$ eine Obersumme für f^{inv} auf $[c,d]$*
- *Weil f und auch f^{inv} streng wachsende monotone Funktionen sind, sind beide Funktionen auf dem jeweiligen Intervall Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f^{inv}(x)\,\mathrm{d}x = bd - ca$$

9.4. Stetigkeit auf $[a, b]$ liefert Integrierbarkeit

Definition 9.5 (gleichmäßig stetig):
*Eine Funktion $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf I, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in I$ gilt:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Also[a]*: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$*

[a] *vgl.* Definition 7.4 (stetige Funktion) und Bemerkung 7.3

Bemerkung 9.6:
Bei gewöhnlicher Stetigkeit ist es erlaubt, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von x abhängt. Bei gleichmäßiger Stetigkeit muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren, welches zu allen x passt.

Bemerkung 9.7:
Ist eine Funktion f Lipschitz-stetig[a] auf D, dann ist f auch (gleichmäßig) stetig auf D.
Genauer: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig

[a] *vgl.* Definition 8.4 (Lipschitz-stetig)

Theorem 9.3 (Satz von Heine):
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Theorem 9.4:
Eine stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

9.5. Eigenschaften von Integralen

Ganz formell kann man das Integral betrachten als eine Abbildung $\mathcal{I}: R[a, b] \to \mathbb{R}$. Mit $R[a, b]$ sind die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ gemeint, und $\mathcal{I}$ ist jetzt

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ für alle } f \in R[a, b]$$

Operator

Eine Abbildung, die auf Funktionen definiert ist, wird meistens „**Operator**“ genannt. Der Operator $\mathcal{I}$ heißt **linear**, wenn

$$\mathcal{I}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{I}(f) + \mu \mathcal{I}(g) \text{ für alle } f, g \in R[a, b] \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) \qquad (9.1)$$

Bemerkung 9.8:
Wenn man $\lambda \in \mathbb{R}$ in (9.1) durch eine Funktion ersetzt, bekommt man fast immer Unsinn. Denn für fast alle Funktionen mit $a \neq b$ hat man

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq f(x)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(links ist x nur Notationshilfe und rechts auch noch Variable?) und

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 9.5:
Wenn $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind auf $[a,b]$, dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar auf $[a,b]$.

Satz 9.6:
Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist auch $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$.

Theorem 9.5 (Mittelwertsatz für Integrale):
Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist auf $[a,b]$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist f auch integrierbar auf $[a,x]$ für jedes $x \in [a,b]$. Also ist die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \tag{9.2}$$

wohldefiniert.

Wohldefiniert auf X bedeutet, dass der Limes für alle Werte auf X konvergiert.

Theorem 9.6:
Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in (9.2) stetig und sogar Lipschitz-stetig.

9.6. Der Hauptsatz der Integralrechnung

Theorem 9.7 (1. Hauptsatz der Integralrechnung):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$, und definiere $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

Wenn f stetig ist in $c \in (a,b)$, dann ist F differenzierbar in c und $F'(c) = f(c)$.

Bemerkung 9.9:
Wenn f rechtsstetig[a] in $c \in [a,b)$ ist, dann ist F rechtsdifferenzierbar[b] in c und

$$F'_+(c) = f(c)$$

Wenn f linksstetig in $c \in (a,b]$ ist, dann ist F linksdifferenzierbar in c und

$$F'_-(c) = f(c)$$

[a] *vgl.* Definition 7.5
[b] *vgl.* Definition 8.2 für Notationserklärung

Bemerkung 9.10:
Wenn f stetig ist auf $[a,b]$, dann ist F differenzierbar in (a,b), rechtsdifferenzierbar in a und linksdifferenzierbar in b, und

$$F'(c) = f(c) \text{ für } c \in (a,b), \quad F'_+(a) = f(a) \quad \text{und} \quad F'_-(b) = f(b)$$

Definition 9.6 (Stammfunktion):
Sei (a,b) ein Intervall in $\mathbb{R}$. Nehme an $f, F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) sind Funktionen und F ist differenzierbar in (a,b). Wenn

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a,b)$$

dann nennt man F eine ***Stammfunktion*** *zu f.*

Lemma 9.3:
Wenn F und $G\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) beide eine Stammfunktion zu f sind, dann gibt es eine Konstante $k \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart, dass

$$F(x) = G(x) + k \text{ für alle } x \in (a,b)$$

Bemerkung 9.11:
Es wird oft gesagt, dass $\ln|x|$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$ ist. Diese Aussage ist nicht sehr genau.
Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x|\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.
Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x|\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Die Formeln sind zwar gleich, aber weil Stammfunktionen auf einem *zusammenhängenden* Intervall definiert sind, sagt man nicht $x \mapsto \frac{1}{x}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ hat $x \mapsto \ln|x|\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion.

Theorem 9.8 (2. Hauptsatz der Integralrechnung):
Sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar[a] *auf $[a,b]$. Setze $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a \\ F'(x) & \text{für } x \in (a,b) \\ F'_-(b) & \text{für } x = b \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_y^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x) - F(y) \text{ für alle } x, y \in [a,b]$$

[a] *vgl.* Bemerkung 9.12

Bemerkung 9.12:
Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **stetig differenzierbar auf $[a,b]$**, wenn gilt: F ist stetig auf $[a,b]$, F ist differenzierbar in (a,b), die rechte Ableitung $F'_+(a)$ und die linke Ableitung $F'_-(b)$ existieren, und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a \\ F'(x) & \text{für } x \in (a,b) \\ F'_-(b) & \text{für } x = b \end{cases}$ ist stetig.

9.7. Partielle Integration

Satz 9.7 (Partielle Integration):
Wenn $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, und $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$ mit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetig, dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x)\,\mathrm{d}x = [F(x) \cdot G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei $[F(x) \cdot G(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a)$.

9.8. Substitutionsregel

Satz 9.8 (Integration durch Substitution):
Wenn $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und $f\colon g[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt

$$\int_a^b (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y \tag{9.3}$$

Man schreibt $g[a,b] = \{y \in \mathbb{R} \colon \exists x \in [a,b] \text{ mit } y = g(x)\}$.

Bemerkung 9.13:
Grob gesagt: Wenn $y = g(x)$ ersetzt wird, muss auch $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(g(x)) = g'(x)\,\mathrm{d}x$ ersetzt werden. Im Moment hat ein loses $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}(g(x))$ und $\mathrm{d}x$ ohne Integral keine Bedeutung. Als *Trick* funktioniert es.

Bemerkung 9.14:
Wir sind davon ausgegangen, dass man bei einem Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Grenzen so anordnet, dass $a < b$. Bei dieser Substitutionsregel ist es vernünftig auch $a > b$ zu erlauben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für monotone Funktionen g kann man zusammenfassen:

$$\int_{g([a,b])} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{[a,b]} (f \circ g)(x) \cdot |g'(x)|\,\mathrm{d}x \tag{9.4}$$

Für nicht-monotone Funktionen ist (9.3) auch gültig, aber für (9.4) braucht man eine eineindeutige Funktion g.

9.9. Kalkül bei Integralen

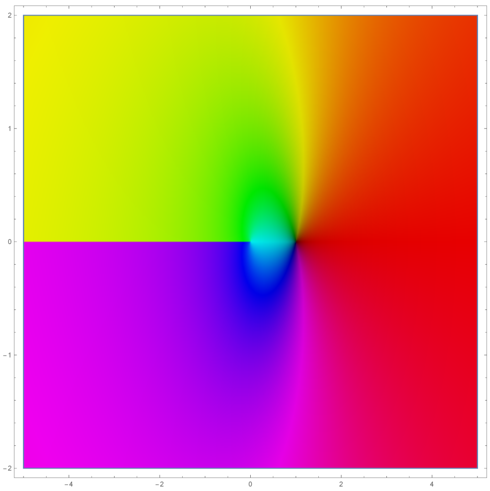
Bis vor 30 Jahren war das Berechnen von expliziten Formeln für Stammfunktionen ein wichtiger Bestandteil von jedem Anfängerkurs in Mathematik. Heutzutage überlässt man diese Arbeit meistens Maple, Mathematica oder anderen Programmen in dieser Richtung.

9.9.1. Integration von rationalen Funktionen

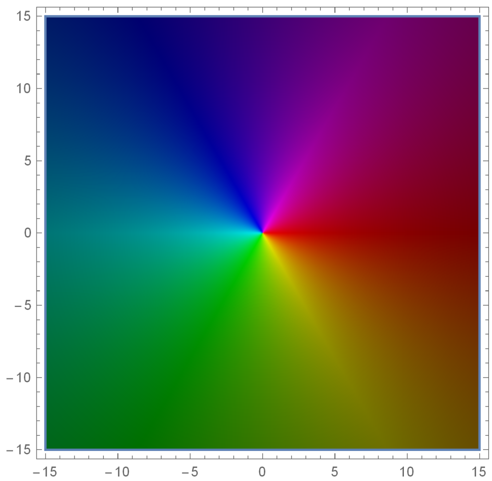
Für Konstanten gilt:	$f(x) = c$	$\Rightarrow F(x) = c \cdot x$
Für Vielfache gilt:	$f(x) = c \cdot g(x)$	$\Rightarrow F(x) = c \cdot G(x)$
Für Potenzfunktionen gilt:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

Definition 9.7 (komplexer Logarithmus):
Der ***komplexe Logarithmus*** $\log\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *wird definiert durch*

$$\log(z) = \ln(|z|) + \imath \arg(z)$$



komplexer Logarithmus $f(z) = \log(z)$



komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$

Die Farbdarstellung der komplexen Zahlenebene wird häufig zur Veranschaulichung komplexer Funktionen angewendet. Die Farbe kodiert das *Argument* und die Helligkeit gibt den *Betrag* an.

Lemma 9.4:
Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $f(x) = (x+w)^{-1}$. Dann ist $F(x) = \log(x+w)$ eine Stammfunktion.

Bemerkung 9.15:
Eine genaue Formulierung von Lemma 9.4 müsste das Definitionsgebiet der Funktion einschließen. Für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist sowohl f als auch F auf ganz $\mathbb{R}$ definiert als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Für $w \in \mathbb{R}$ kann man entweder die Funktion $f\colon (-w, \infty) \to \mathbb{R}$ oder die Funktion $f\colon (-\infty, -w) \to \mathbb{R}$ betrachten. Die Vorschriften der dazugehörenden Stammfunktionen sind $F(x) = \ln(x+w)$ und $F(x) = \ln|x+w|$.

Lemma 9.5:
Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $zw \notin \mathbb{R}_-$ gibt es $k \in \{-1, 0, 1\}$ derart, dass

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + 2k\pi\imath$$

9.9.2. Integration von trigonometrischen Polynomen

trigonometrisches Polynom

Ein **trigonometrisches Polynom** ist eine Verknüpfung von:

$$\begin{aligned} x \mapsto \quad & \big(\cos(x), \sin(x)\big) \\ & \quad (s,t) \qquad \mapsto \sum_{\substack{0 \le k \le m \\ 0 \le n \le m}} a_{n,k} s^k t^n \end{aligned}$$

mit $a_{n,k} \in \mathbb{C}$.

Hier hilft der Weg über die komplexen Funktionen und wir erinnern uns an den komplexen Sinus und Cosinus aus Definition 8.6

$$\sin(z) = \tfrac{1}{2\imath}(\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}) \quad \text{und} \quad \cos(z) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z})$$

Beispiel:
Wir suchen eine Stammfunktion für die Funktion $g(z) = 1 + \sin(z) + 3\cos(z)^2$:

$$\int g(z)\,\mathrm{d}z = \int 1 + \sin(z) + 3\cos(z)^2\,\mathrm{d}z$$

Zuerst splitten wir das Integral in die Summanden auf

$$\int g(z)\,\mathrm{d}z = \int 1\,\mathrm{d}z + \int \sin(z)\,\mathrm{d}z + 3\int \cos(z)^2\,\mathrm{d}z \tag{9.5}$$

Die einzige Funktion deren Stammfunktion nicht trivial ist, ist die von $\cos(z)^2$:

$$
\begin{aligned}
\int \cos(z)^2 \,\mathrm{d}z &= \int \left(\frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2}\right)^2 \mathrm{d}z \\
&= \int \frac{\mathrm{e}^{2\imath z} + \mathrm{e}^{-2\imath z}}{4} + \frac{1}{2} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\int \left(\mathrm{e}^{2\imath z} + \mathrm{e}^{-2\imath z}\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\left(-\frac{\imath}{2}\mathrm{e}^{2\imath z} + \frac{\imath}{2}\mathrm{e}^{-2\imath z}\right) \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\imath}\mathrm{e}^{2\imath z} - \frac{1}{2\imath}\mathrm{e}^{-2\imath z}\right) \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin(2z)
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

Wir setzten (9.6) in (9.5) ein und finden

$$
\begin{aligned}
\int g(z) \,\mathrm{d}z &= z - \cos(z) + 3\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin(2z)\right) \\
&= z - \cos(z) + \frac{3}{2}z + \frac{3}{4}\sin(2z) \\
&= \boxed{\frac{5}{2}z + \frac{3}{4}\sin(2z) - \cos(z)}
\end{aligned}
$$

9.9.3. Integration von rationalen Funktionen mit Exponent

Eine Funktion mit Exponent, die wir meinen, ist eine Zusammenstellung von

$$
x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \qquad y \mapsto \frac{p(y)}{q(y)}
$$

Hier sind p und q zwei Polynome. Also betrachten wir Funktionen vom Typ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$
f(x) = \frac{p(\mathrm{e}^{ax})}{q(\mathrm{e}^{ax})}
$$

Mit Substitutionsregel folgt

$$
\int_0^x \frac{p(\mathrm{e}^{at})}{q(\mathrm{e}^{at})} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_1^{\mathrm{e}^{ax}} \frac{p(s)}{q(s)s} \,\mathrm{d}s
$$

also das finden einer Stammfunktion für eine rationale Funktion.

9.9.4. Integration bei quadratischen Wurzeln aus Polynomen von Grad 2

Wir erinnern uns an die Winkelfunktionen aus den Definitionen 8.6, 8.10, 8.17 und 8.18.

- Der eingeschränkte Sinus hat als Umkehrfunktion den Arcussinus

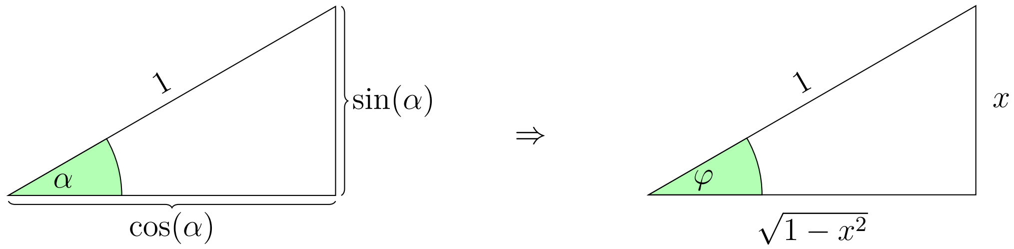
$$\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{\text{inv}}(x) \text{ wobei } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Der Sinus hyperbolicus hat als Umkehrfunktion den Areasinus hyperbolicus

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{ wobei } \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- Der eingeschränkte Cosinus hyperbolicus hat als Umkehrfunktion den Areacosinus hyperbolicus

$$\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \text{ wobei } \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$



9.10. Uneigentliche Integrale

9.10.1. Das uneigentliche Riemann-Integral der ersten Sorte

Definition 9.8 (uneigentlich Riemann-integrierbar (beschränkt)):
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar ist auf $[a+\delta, b]$. Wenn

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

*nennt man f **uneigentlich Riemann-integrierbar** auf $[a,b]$ und man schreibt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \ell$$

Bemerkung 9.16:
Wenn f unbeschränkt bei b wird, kann man bedenken, dass man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ nennt, wenn

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Wenn f an mehreren Stellen unendlich wird und man möchte uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit untersuchen, soll jede Stelle abgesondert betrachtet werden.

Lemma 9.6:
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar sind auf $[a+\delta, b]$. Nehme an, dass

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \textit{ für } x \in (a,b]$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

9.10.2. Das uneigentliche Riemann-Integral der zweiten Sorte

Definition 9.9 (uneigentlich Riemann-integrierbar (unbeschränkt)):
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar ist auf $[a,T]$. Wenn

$$\ell := \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x \textit{ existiert}$$

*nennt man f **uneigentlich Riemann-integrierbar** auf $[a,\infty)$ und man schreibt*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \ell$$

Lemma 9.7:
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar sind auf $[a,T]$. Nehme an, dass

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \textit{ für } x \in (a,\infty]$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,\infty]$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,\infty]$.

9.11. Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale

Lemma 9.8:
Wenn $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *folgende Bedingungen erfüllt:*

1. f *ist positiv:* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}_+$
2. f *ist monoton fallend:* $x > y > 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Folgerung 9.1:
Sei f *wie in Lemma 9.8. Dann gilt:*
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergiert, dann und nur dann, wenn* $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergiert.*

Analysis II

10. Kurven

10.1. Der n-dimensionale Raum

Unter einem n-dimensionalen Raum, für ein $n \in \mathbb{N}_+$, versteht man

$$\mathbb{R}^n := \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon \text{mit } x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}$$

Ebenso gibt es auch $\mathbb{C}^n := \Big\{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \colon \text{mit } z_i \in \mathbb{C} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}$. Elemente des $\mathbb{R}^n$ nennt man **Vektoren**, diese kann man miteinander *addieren* und sie mit Zahlen aus $\mathbb{R}$ *multiplizieren*. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ setzt man

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \tag{10.1}$$
$$t \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \tag{10.2}$$

Die Struktur, die man so bekommt, werden wir allgemeiner beschreiben.

Definition 10.1 (Vektorraum):
$(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ *heißt ein* ***Vektorraum über*** $\mathbb{K}$ *oder* $\mathbb{K}$-***Vektorraum***, *mit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, *wenn Addition und Multiplikation mit Skalaren wohldefiniert sind*

$$t \in \mathbb{K} \text{ und } x, y \in V \Rightarrow x + y \in V \text{ und } t \cdot x \in V$$

und folgende Eigenschaften gelten:

- $(V, +)$ ***ist eine abelsche Gruppe:***
  1. *Assoziativität:* $\forall x, y, z \in V \colon x + (y + z) = (x + y) + z$
  2. *neutrales Element:* $\exists \mathbb{0} \in V$ *so dass* $\forall x \in V$ *gilt* $x + \mathbb{0} = x$
  3. *inverse Elemente:* $\forall x \in V\ \exists -x \in V$ *so dass* $x + (-x) = \mathbb{0}$
  4. *Kommutativität:* $\forall x, y \in V \colon x + y = y + x$
- ***Für die Multiplikation mit Skalaren gilt:***
  5. *Assoziativität:* $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ *und* $x \in V$ *gilt* $t_1 \cdot (t_2 \cdot x) = (t_1 \cdot t_2) \cdot x$
  6. *unitäres Element:* $\exists \mathbb{1} \in V$ *so dass* $\forall x \in V$ *gilt* $\mathbb{1} \cdot x = x$
  7. *Distributivität:* $\forall t \in \mathbb{K}$ *und* $x, y \in V$ *gilt* $t \cdot (x + y) = (t \cdot x) + (t \cdot y)$

Bemerkung 10.1:
$(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ mit der Addition aus (10.1) und der Multiplikation mit Skalaren aus (10.2) ist ein Vektorraum. Oft schreibt man kurz $\mathbb{R}^n$.

Auch $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$ mit dieser Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein Vektorraum, kurz: $\mathbb{C}^n$.

Weiter definiert man für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

- die **Länge**[a] (oder **Größe**) von x:

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \tag{10.3}$$

- die **Distanz**[b] (oder **Abstand**) zwischen x und y:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

- das **Skalarprodukt**[c] der Vektoren x und y:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &:= x * y \\ &:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \tag{10.4}$$

[a] *vgl.* Definition 10.2
[b] *vgl.* Definitionen 18.3 und 20.2
[c] *vgl.* Definition 10.3

Notation:
Wenn klar ist, dass $x \in \mathbb{R}^n$, schreibt man oft auch $|x|$ statt $\|x\|$. Für $\mathbb{R}^1$ stimmen Betrag und Länge überein.

Wenn wir $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben, werden wir ab jetzt x_k für die k-te Koordinate schreiben.

Bemerkung 10.2 (euklidischer & unitärer Vektorraum):
Einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt nennt man einen **euklidischen Vektorraum**.

Einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt[a] nennt man einen **unitären Vektorraum**.

[a] also eine positiv definite *hermitesche* Form auf V

10.2. Die Definition einer Kurve

Definition 10.2 (Norm):
*Eine **Norm** ist eine Abbildung $\|\cdot\|$ von einem Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto \|x\|$$

die für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden drei Eigenschaften (Axiome) besitzt:

1. ***Definitheit**: $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$*
2. ***absolute Homogenität**: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$*
3. ***Subadditivität** oder **Dreiecksungleichung**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

*Falls nur die Homogenität und die Dreiecksungleichung gelten, dann nennt man $\|\cdot\|$ eine **Seminorm**.*

Lemma 10.1:
Die Länge $\|\cdot\|$, definiert in (10.3), ist eine Norm auf $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$.
Man nennt $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$ einen ***normierten Vektorraum****.*

Definition 10.3 (inneres Produkt):
Ein ***inneres Produkt*** *auf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$, d. h. für $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Bedingungen:*

1. ***bilinear****:*
   - $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
   - $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
   - $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
   - $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
2. ***symmetrisch****: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$*
3. ***positiv definit****: $\langle x, x\rangle \geq 0$, und $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$*

Lemma 10.2:
Das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$, definiert in (10.4), ist ein inneres Produkt des $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 10.3:
Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x * x = \|x\|^2$.

Für Vektorräume über $\mathbb{C}$ ersetzt man die Symmetrie in Definition 10.3 durch

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \text{ für alle } x, y \in V$$

Die Definition der Länge und des komplexen inneren Produktes wird für $z, w \in \mathbb{C}^n$ wie folgt gemacht:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}}$$
$$\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$$

$(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ ist ein **normierter Vektorraum** über $\mathbb{C}$.

Lemma 10.3 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz):
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$-1 \leq \frac{x * y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

und das erlaubt uns, den Winkel φ zwischen zwei nicht trivialen Vektoren wie folgt zu definieren:

$$\varphi = \measuredangle(x, y) := \arccos\left(\frac{x * y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

Diese Definition stimmt mit unserer geometrischen Vorstellung vom Winkel zwischen zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ überein. Insbesondere ist sie nicht abhängig von der Größe der Vektoren.

Lemma 10.4 (Die Dreiecksungleichung):
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Definition 10.4 (stetig und differenzierbar in höheren Dimensionen):
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

- *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt **stetig**, wenn jede Komponente $f_k\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist*
- *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar**, wenn jede Komponente $f_k\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Die Ableitung f' in $t \in I$ wird wie folgt definiert:*

$$f'(t) = \left(f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)\right)$$

- *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt **stetig differenzierbar**, wenn die Ableitungen $f_k'\colon I \to \mathbb{R}$ stetig[a] sind*

[a] $f_k'\colon I \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn f_k', definiert im Innern I° von I, auf dem Rand ∂I zu einer stetigen Funktion erweitert werden kann. Man nehme am Rand die linke beziehungsweise rechte Ableitung.

Ebenso lässt sich zweimal differenzierbar, zweimal stetig differenzierbar, stückweise differenzierbar, rechtsdifferenzierbar usw. definieren.

Sind M und N topologische Räume, so schreibt man $\mathcal{C}^0(M, N)$ oder $\mathcal{C}^0(M \to N)$ für die **Menge der stetigen Funktionen** $f\colon M \to N$.

Für eine nicht-leere, offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ bezeichnet man die Menge der *reellwertigen* und auf ganz D stetigen Funktionen mit $\mathcal{C}(D)$, $\mathcal{C}^0(D)$, $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ oder $\mathcal{C}^0(D \to \mathbb{R})$.[1]

Entsprechend wird die **Menge der einmal stetig differenzierbaren Funktionen** mit $\mathcal{C}^1(D)$, beziehungsweise für eine natürliche Zahl n die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $\mathcal{C}^n(D)$ bezeichnet.

Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktion wird rekursiv definiert durch

$$f \in \mathcal{C}^n(D) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{C}^1(D) \quad \text{und} \quad f' \in \mathcal{C}^{n-1}(D)$$

Es gilt: $\mathcal{C}^n(D) \subset \mathcal{C}^{n-1}(D) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D)$.

Definition 10.5 (Kurve):
*Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ nennen wir eine **Kurve**. Das Bild $f(I)$ nennt man die **Spur**.*

- *Wenn f differenzierbar ist auf I, nennen wir die Kurve differenzierbar. Der Vektor $f'(t)$ heißt der **Tangentialvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t*
- *Wenn f stetig differenzierbar ist auf I und $\|f'(t)\| \neq 0$ für alle $t \in I$, nennen wir die Kurve **glatt** oder **regulär***
- *$t \in I$ heißt **singulär**, wenn $f'(t) = 0$*

[1] *vgl.* Bemerkung 9.12

Bemerkung 10.4:
Das Intervall I muss dabei nicht unbedingt offen sein, sondern kann abgeschlossen oder halbabgeschlossen sein.

Ist $n = 2$, so sprechen wir von einer **ebenen Kurve**. Ist $n = 3$, so nennen wir f eine **Raumkurve**.

Bemerkung 10.5:
Die gleiche Spur kann man durch mehrere, verschiedene Kurven bekommen.

Definition 10.6 (Einheitsvektor):
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $y = f'(t) \in \mathbb{R}^n$ der Tangentialvektor an der Parameterstelle t.

- *$\tau = \frac{y}{\|y\|}$ nennt man den **Tangentialeinheitsvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t*
- *jeden Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$ und $\langle \nu, \tau \rangle = 0$, nennt man einen **Normaleneinheitsvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t*

Bemerkung 10.6:
In zwei Dimensionen kann man aus einem Tangentialeinheitsvektor τ sehr einfach einen Normaleneinheitsvektor ν konstruieren:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}$$

10.3. Bogenlänge

Eine **Zerlegung** des Intervalls $[a, b]$ der **Feinheit** δ besteht aus Zahlen

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$$

so dass $t_{i+1} - t_i < \delta$ für alle i.

Polygonzug

Ein **Polygonzug** ist eine Kette von Geraden, die man benutzen kann, um die Länge einer Kurve f zu approximieren. Setzt man die Knotenpunkte $t_0, t_1, \ldots, t_k$, dann ist die Länge dieses Polygonzuges gleich

$$L(f, t_0, t_1, \ldots, t_k) = \sum_{j=1}^{k} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$$

Definition 10.7 (rektifizierbar):
*Wir sagen eine Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist **rektifizierbar** wenn es ein ℓ gibt mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung mit der Feinheit δ gilt:*

$$|L(f, t_0, t_1, \dots, t_k) - \ell| < \varepsilon$$

*Wenn f rektifizierbar ist, dann nennen wir ℓ die **Bogenlänge** von f.*

Definition 10.8 (Bogenlänge):
*Für eine stetig differenzierbare Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert man die **Bogenlänge** von f über das Intervall $[a,b]$ durch*

$$\ell := \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Lemma 10.5:
Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ glatte Kurven sind und außerdem gilt:

1. *die Spur ist identisch: $f([a,b]) = g([c,d])$,*
2. *f und g sind injektiv*[a]

dann sind auch die Bogenlängen identisch.

[a] wobei isolierte Stellen als Ausnahme zugelassen sind

Bemerkung 10.7:
Anders gesagt bedeutet Lemma 10.5: Die Bogenlänge ist nur gleich bei Kurven, bei denen die Spur *genau einmal* durchlaufen wird.

Umparametrisierung auf Bogenlänge

Für eine glatte Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$s(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$$

Für diese Funktion s gilt, dass $s(t)$ die Länge der Kurve ist zwischen $f(a)$ und $f(t)$, und für die Bogenlänge von f gilt dann $\ell_f = s(b)$. Weil f glatt ist, sind die Komponenten differenzierbar und es gilt

$$s'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

Wegen des Satzes für inverse Funktionen ist $\sigma = s^{\text{inv}}$ wohldefiniert auf $[0, \ell_f]$, sogar differenzierbar, und es gilt

$$\sigma(0) = a, \quad \sigma(\ell_f) = b \quad \text{und} \quad \sigma'(t) = \frac{1}{s'(\sigma(t))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(t))\|}$$

Wir setzen

$$\varphi\colon [0, \ell_f] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi(t) = f \circ \sigma(t)$$

Diese Kurve φ heißt die *Umparametrisierung auf Bogenlänge* von f.

Notation

- Für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definieren wir die Kurve $-\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ durch
$$(-\gamma)(t) = \gamma(b+a-t)$$
- Für zwei Kurven $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\zeta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(b) = \zeta(c)$ definieren wir die Kurve $\gamma + \zeta\colon [a, b+d-c]$ durch
$$(\gamma+\zeta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \zeta(t-b+c) & \text{für } t \in (b, b+d-c] \end{cases}$$
- Für eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ wird $n\gamma\colon [a, n(b-a)+b]$ mit $n \in \mathbb{N}$ definiert durch
$$(n\gamma)(t) = \gamma\big(t-k(b-a)\big) \text{ für } t \in [a+k(b-a), b+k(b-a)] \text{ und } k \in \{0,\dots,n-1\}$$

10.4. Flächeninhalt

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die zweidimensionale Ebene.

Lemma 10.6:
Ein Dreieck mit den Ecken $(0,0), (x_1,x_2)$ *und* (y_1,y_2)*, orientiert gegen den Uhrzeigersinn, hat den Flächeninhalt*
$$I = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Lemma 10.7 (Sektorformel von Leibniz):
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *eine glatte Kurve. Wenn der Fahrstrahl aus* $(0,0)$ *an dieser Kurve ein Gebiet einmal überstreicht, dann gilt für den orientierten Flächeninhalt*[a]
$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_1'(t) \\ f_2(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t$$

[a] „orientierter Flächeninhalt“ heißt hier: von dem in einer Bewegung nach links überstrichenen Gebiet wird der Standard-Flächeninhalt genommen und von dem in einer Bewegung nach rechts überstrichenen Gebiet wird der Flächeninhalt mit einem Minuszeichen genommen.

Bemerkung 10.8:
Wenn man eine Kurve mit Polarkoordinaten beschreibt, das heißt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(t) = \big(r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)\big)$$
wobei $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann vereinfacht sich die Sektorformel von Leibniz zu
$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \big(r(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t$$

Folgerung 10.1:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte geschlossene[a] Kurve. Wenn sie linksherum orientiert ist und $f_{[a,b)}$ ist injektiv, dann gilt für den Flächeninhalt I vom umschlossenen Gebiet die Sektorformel von Leibniz.

[a] Geschlossen heißt $f(a) = f(b)$

10.5. Definition der Krümmung

Wenn wir eine Kurve $t \mapsto f(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ betrachten, und dabei t als Zeit sieht, hat man physikalisch gesehen das folgende:

- $f(t)$ ist der Ortsvektor zum Zeitpunkt t
- $f'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t
- $f''(t)$ ist der Beschleunigungsvektor zum Zeitpunkt t

Wenn man statt f die Umparametrisierung auf Bogenlänge φ betrachtet, bedeutet das, dass man die Spur mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft, genauer gesagt mit Geschwindigkeitsgröße 1.

Definition 10.9 (Krümmung):
Sei $\varphi\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve mit $\|\varphi'(t)\| = 1$ für $t \in [0,T]$. Dann definiert man an der Parameterstelle t:

- *die **Krümmung**: $\kappa(t) = \|\varphi''(t)\|$*

und falls $\varphi''(t) \neq 0$:

- *den **Hauptnormalenvektor**: $\nu(t) = \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|}$*
- *den **Krümmungsradius**: $r(t) = \frac{1}{\|\varphi''(t)\|}$*
- *den **Krümmungsmittelpunkt**: $m(t) = \varphi(t) + \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|^2}$*

Falls $\varphi''(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,T]$

- *die **Evolute**: die Kurve $m\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit $m(t)$ wie oben*

Der Kreisbogen, der $\varphi(t)$ für t nahe an t_0 so am Besten approximiert, würde man dann parametrisieren durch

$$c(t) = m(t_0) + R\sin\left(\frac{t-t_0}{R}\right)\varphi'(t_0) + R\cos\left(\frac{t-t_0}{R}\right)\frac{-\varphi''(t_0)}{\|\varphi(t_0)\|} \tag{10.5}$$

Lemma 10.8:
Sei $\varphi\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}^n$ *eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, mit*

- $\|\varphi'(t)\| = 1$ *für alle* $t \in [0,\ell]$ *und*
- *es gibt ein* $t_0 \in (0,\ell)$ *mit* $\|\varphi''(t_0)\| \neq 0$

Sei c *definiert in* (10.5). *Dann folgt*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\varphi(t)-c(t)}{(t-t_0)^2} = 0$$

10.6. Krümmung bei beliebigen Kurven

Die Integrale, die erscheinen wenn man eine Kurve auf Bogenlänge umparametrisiert, sind selten explizit zu lösen. Deshalb möchte man die Krümmung berechnen ohne umzuparametrisieren.

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte, zweimal stetig differenzierbare Kurve und $\varphi\colon [0,\ell_f] \to \mathbb{R}^n$ die auf Bogenlänge umparametrisierte. Das heißt, für

$$s(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

hat man $f = (\varphi \circ s)$. Daraus folgt $f' = (\varphi' \circ s)s'$ und $f'' = (\varphi'' \circ s)(s')^2 + (\varphi' \circ s)s''$.

Lemma 10.9:
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *eine glatte Kurve. Dann gilt für*

- *die Krümmung*
$$\kappa = \|\varphi'' \circ s\| = \frac{\sqrt{\|f'\|^2\|f''\|^2 - (f'f'')^2}}{\|f'\|^3}$$
- *der Krümmungsradius bleibt* κ^{-1}
- *den Hauptnormalenvektor*
$$\nu = \frac{\|f'\|^2 f'' - (f'f'')f'}{\Big\|\|f'\|^2 f'' - (f'f'')f'\Big\|}$$
- *den Krümmungsmittelpunkt*
$$m = f + \frac{\varphi'' \circ s}{\|\varphi'' \circ s\|^2} = f + \|f\|^2 \frac{\|f'\|^2 f'' - (f'f'')f'}{\|f'\|^2\|f''\|^2 - (f'f'')^2}$$
- *die Evolute bleibt* m

Vektorprodukt

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte, zweimal differenzierbare Kurve. Am Punkt $f(t)$ kann man jetzt einen Tangentialvektor und einen Hauptnormalenvektor konstruieren. Will man ein komplettes Dreibein an dieser Stelle $f(t)$ haben, kann man einen zweiten Normalenvektor bekommen durch das **Vektorprodukt**:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_1 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Hier sind $\{e_1, e_2, e_3\}$ die drei Standardeinheitsvektoren. Wenn φ eine Parametrisierung auf Kurvenlänge ist, dann hat man ein Dreibein $\Big\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'(t) \times \varphi''(t)\Big\}$.

Bemerkung 10.9 (Eigenschaften des Vektorprodukts):
Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$, auch **Kreuzprodukt** genannt, hat folgende Eigenschaften: Sei $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $s, t \in \mathbb{R}$.

- $u \times v = -v \times u$, also $u \times u = 0$
- $(su + tv) \times w = s(u \times w) + t(v \times w)$
- $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\big(\measuredangle(u, v)\big)$ ist der Flächeninhalt vom Parallellogramm mit den Ecken $O, u, u + v$ und v
- $\{u, v, u \times v\}$ ist positiv orientiert (Rechterhandregel)
- $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$, die Graßman-Identität
- $(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w)$ mit u, v, w als Spaltenvektoren. Wenn $\{u, v, w\}$ positiv orientiert ist, gleicht $\det(u, v, w)$ dem Inhalt des Parallelepipeds (auch Spat genannt), $P = \{c_1 u + c_2 v + c_3 w \colon 0 \leq c_i \leq 1\}$

11. Differentialgleichungen

11.1. Eine Einleitung

11.1.1. Lösungsbegriff

Definition 11.1 (Lösung einer Differentialgleichung):
Sei $F\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man nennt die Funktion x eine ***Lösung der Differentialgleichung*** *k-ter Ordnung*

$$x^{(k)}(t) = F(x^{(k-1)}(t), x^{(k-2)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t) \tag{11.1}$$

1. *wenn es ein Intervall I in $\mathbb{R}$ gibt derart, dass $x\colon I \to \mathbb{R}$ eine k-mal differenzierbare Funktion ist*
2. *wenn die Funktion x für alle $t \in I$ die Gleichung (11.1) erfüllt*

Es gibt Lösungen mit (einseitig) beschränktem Definitionsgebiet oder mit ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsgebiet. Das zusammenhängende Definitionsgebiet für eine Lösung wird das **Existenzintervall** genannt.

Die höchste Ableitung die erscheint, heißt die **Ordnung** der Differentialgleichung. Wenn man so eine Differentialgleichung in **expliziter Form** schreiben kann:

$$x^{(n)}(t) = G(x^{(n-1)}(t), x^{(n-2)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t)$$

hat diese Differentialgleichung Ordnung n.

Wenn man eine Differentialgleichung bekommt, hätte man am liebsten, dass es eine explizit bekannte Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$ bei einem System von mehreren Differentialgleichungen) gibt, so dass die Gleichung erfüllt ist. Leider passiert das recht selten. Meistens muss man sich zufrieden geben, wenn man die folgenden Fragen beantworten kann:

1. Gibt es eine Lösung?
2. Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
3. Kann man qualitative Ergebnisse für diese Lösung finden?

11.1.2. Erste Ordnung und Systeme höherer Ordnung

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung kann man immer schreiben als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Für die Gleichung

$$x^{(n)}(t) = G(x^{(n-1)}(t), x^{(n-2)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t) \tag{11.2}$$

setzt man $x_1(\cdot) = x(\cdot),\ x_2(\cdot) = x'(\cdot),\ \dots,\ x_n(\cdot) = x^{(n-1)}(\cdot)$, oder mit Vektornotation

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ G(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), t) \end{pmatrix}$$

Setzen wir

$$\vec{F}\Big(t, \vec{x}(t)\Big) := \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ G(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), t) \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

so folgt

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}\Big(t, \vec{x}(t)\Big) \tag{11.4}$$

ist ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Eine Lösung ist eine differenzierbare (Vektor)Funktion $\vec{x}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall ist.

Lemma 11.1:
Seien F und G wie in (11.3) und $I \subset R$ ein Intervall.

- *Wenn $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (11.4), dann ist $x := x_1\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (11.2)*
- *Wenn $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (11.2), dann ist $\vec{x} := (x, \dots, x^{(n-1)})^\mathsf{T}\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (11.4)*

11.2. Lineare Gleichungen, konstante Koeffizienten

Definition 11.2 (lineare Differentialgleichung):
Eine Differentialgleichung der Form

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t)$$

nennt man ***linear****.*

- *Man sagt* ***mit konstanten Koeffizienten****, wenn $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ für jede $i = 1, \ldots, n$ und $t \in \mathbb{R}$*
- *Man nennt diese lineare Gleichung* ***homogen****, wenn $f = 0$*

11.2.1. Einfache Beispiele linearer Gleichungen

Lemma 11.2:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

genau eine Lösung[a], nämlich $x(t) = x_0 + \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$.

[a] Lösung heißt hier eine differenzierbare Funktion $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die beide Gleichungen in $(*)$ erfüllt

Lemma 11.3:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda, x_0 \in \mathbb{R}$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + f(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung, nämlich $x(t) = \exp(\lambda(t-a))x_0 + \int_a^t \exp(\lambda(t-s))f(s)\,\mathrm{d}s$.

Variation der Konstante

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine Lösung x von

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t)$$

1. Das Lösen des homogenen Problems $x'(t) = \lambda x(t)$ liefert $x(t) = \exp(\lambda t)c$ mit $c \in \mathbb{R}$
2. Man sucht die Lösungen durch Substitution $x(t) = \exp(\lambda t)c(t)$

11.3. Lineare Systeme, konstante Koeffizienten

Seien $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gegeben. Man versucht $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{aligned} \tag{11.5}$$

Das homogene Problem (also $f(t) \equiv 0$) von (11.5) lässt sich verkürzt darstellen als $x'(t) = Ax(t)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei sollte nicht vergessen werden, dass $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gesucht wird.

Definition 11.3 (Exponentialfunktion für Matrizen):
Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$. Man definiert die ***Exponentialfunktion für Matrizen*** *als*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Bemerkung: *Statt $\exp(A)$ schreibt man auch e^A.*

Lemma 11.4:
Für alle $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ konvergiert

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k \text{ in } M^{n\times n}(\mathbb{C})$$

Anders gesagt: $\exp(A)$ ist wohldefiniert.

Lemma 11.5:
Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) & \text{für } t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung, nämlich die Funktion $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $x(t) = \exp(At)x_0$.

Lemma 11.6:
Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ (oder $M^{n\times n}(\mathbb{C})$). Dann gilt

$$\exp(tA)\exp(sB) = \exp(tA + sB) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

dann und nur dann, wenn $AB = BA$.

Theorem 11.1:
Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) & \textit{für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, nämlich

$$x(t) = \exp(A(t-a))x_0 + \int_a^t \exp(A(t-s))f(s)\,\mathrm{d}s$$

Bemerkung 11.1:
Das Integral über einer Vektorfunktion ist definiert als Vektor von den Integralen der einzelnen Komponenten.
Also für $g: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit integrierbaren Komponenten g_i für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \int_a^b g_2(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

Das Definitionsgebiet $[a, b]$ von f wird als Definitionsgebiet für x übernommen. Wenn $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann findet man für die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ die Lösungen $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \exp(A(t-a))x_0 + \int_a^t \exp(A(t-s))f(s)\,\mathrm{d}s$$

Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig zu wählen. Die Tatsache, dass das Definitionsgebiet übernommen wird, trifft nur bei linearen Gleichungen zu.

11.4. Die Lineare Algebra zum Matrixexponenten

Definition 11.4 (Eigenwert):
*Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** von $A :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, so dass*

$$Ax = \lambda x$$

*Der Vektor x heißt dann **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.*

Definition 11.5 (charakteristisches Polynom):
*Das Polynom $\varphi(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ heißt **charakteristisches Polynom**.*

Definition 11.6 (algebraische und geometrische Vielfachheit):

1. ***algebraische Vielfachheit:***
   $\sigma(\lambda)$ ist die Vielfachheit der Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms $\varphi(\lambda)$
2. ***geometrische Vielfachheit:***
   $\rho(\lambda)$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ

Manchmal sagt man ***Ordnung*** *statt algebraischer Vielfachheit und* ***Vielfachheit*** *statt geometrischer Vielfachheit.*

Satz 11.1:
Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist mindestens so groß wie seine geometrische Vielfachheit.

Die geometrische Vielfachheit $\rho(\lambda)$ ist die Dimension des Kerns von $A - \lambda I$, also die Dimension des **Eigenraums** von A zu λ.

Ist λ Eigenwert von A, so ist $1 \leq \rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda) \leq n$. Im Fall $\rho(\lambda) < \sigma(\lambda)$ existieren zu λ Hauptvektoren höherer Stufe.

Definition 11.7 (Hauptvektor):
Ein Vektor x heißt ***Hauptvektor k-ter Stufe*** *zu λ, wenn gilt*

$$(A - \lambda I)^k x = 0 \quad \text{aber} \quad (A - \lambda I)^{k-1} x \neq 0$$

Hauptvektoren werden auch ***generalisierte Eigenvektoren*** *genannt.*

Bemerkung 11.2:
Wegen $(A - \lambda I)^0 x = Ix = x$ sind die Eigenvektoren gerade die Hauptvektoren erster Stufe. Ist x Hauptvektor k-ter Stufe, so ist $(A - \lambda I)x$ Hauptvektor $(k-1)$-ster Stufe.

Der **Hauptraum** ist der Spann aller Hauptvektoren. Seine Dimension ist $\sigma(\lambda)$, d. h. es gibt insgesamt so viele linear unabhängige Hauptvektoren wie die Nullstellenordnung von λ.

Definition 11.8 (ähnliche Matrizen):
Zwei Matrizen heißen ***ähnlich*** *$:\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^{n\times n}$, invertierbar so dass $A = XBX^{-1}$.*

Satz 11.2:
Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich. Dann haben sie dieselben Eigenwerte und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten stimmen überein.

Definition 11.9 (Jordan-Matrix):
Eine Matrix $J \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ ist eine ***Jordan-Matrix****, wenn sie wie folgt aus* ***Jordan-Blöcken*** *zusammengesetzt ist:*

$$J = \begin{pmatrix} c(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c(\lambda_n) \end{pmatrix} \text{ mit } c(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Theorem 11.2:
Für jede Matrix $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ gibt es eine invertierbare Matrix $T \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ und eine Jordan-Matrix $J \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ derart, dass

$$A = TJT^{-1}$$

Lemma 11.7:
Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{R}$.

1. *Für eine Ähnlichkeitstransformation $B, T \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ mit T invertierbar gilt:*

$$A = TBT^{-1} \quad \Rightarrow \quad \exp(tA) = T\exp(tB)T^{-1}$$

2. *Für eine Blockmatrix A mit $B \in M^{k\times k}(\mathbb{C})$ und $C \in M^{(n-k)\times(n-k)}(\mathbb{C})$ gilt:*

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}$$

wobei O die passende Matrix mit ausschließlich 0-Einträgen meint.
Es folgt, dass für eine Diagonalmatrix gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

3. *Für einen Jordanblock gilt:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \frac{1}{2!}t^2\mathrm{e}^{t\lambda} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2\mathrm{e}^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

Satz 11.3:
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Eigenwerten λ_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für die Determinante $\det(A)$ und die Spur $\operatorname{tr}(A)$ folgender Zusammenhang mit den Eigenwerten:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

11.5. Lineare Stabilität

Definition 11.10 (Stabilität linearer Systeme):
Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$. Wir betrachten ein homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = Ax(t) \tag{11.6}$$

Dieses homogene lineare System heißt

- ***stabil***, *wenn es für jede Lösung x ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\|x(t)\| \leq M \text{ für alle } t \geq 0$$

- ***instabil***, *wenn es eine Lösung x gibt, so dass*

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = \infty$$

- ***asymptotisch stabil***, *wenn für alle Lösung x gilt*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

- ***neutral stabil***, *wenn das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist*

Bemerkung 11.3:
Diese Klassifizierung gilt nur für lineare Systeme. Bei homogenen linearen Systemen ist 0 immer eine Gleichgewichtsstelle (also konstante Lösung). Bei Gleichgewichtsstellen für nichtlineare Differentialgleichungen werden diese globalen Bedingungen ersetzt durch lokale Bedingungen für eine Umgebung der Gleichgewichtsstelle.

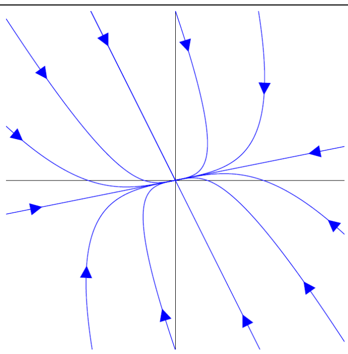
Lemma 11.8:
Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und sei $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ die Menge der unterschiedlichen Eigenwerte für A. Es bezeichne m_i die geometrische Vielfachheit von λ_i.

1. *Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, dann ist (11.6) asymptotisch stabil.*
2. *Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, dann ist (11.6) instabil.*
3. *Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt und die algebraische Vielfachheit für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ gleich m_j ist, dann ist (11.6) stabil.*
4. *Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt und es außerdem ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, wo die algebraische Vielfachheit nicht m_j gleicht, dann ist (11.6) instabil.*

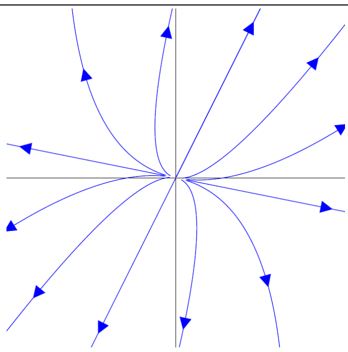
Bemerkung 11.4:
Wenn also gefragt wird, ob alle Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ für $t \to \infty$ nach 0 konvergieren, braucht man nur die Eigenwerte und gegebenfalls die Vielfachheiten zu berechnen.

11.5.1. Klassifizierung in zwei Dimensionen

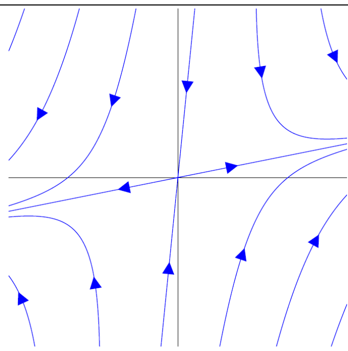
In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten ziemlich übersichtlich. So übersichtlich, dass man sogar individuelle Namen für die auftretenden Fälle hat.



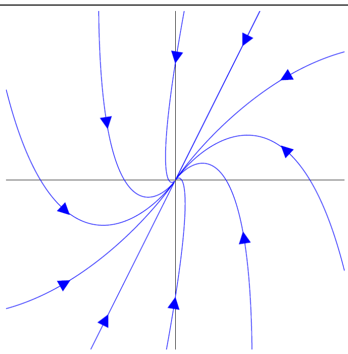
stabiler Knoten
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_-$
Basis von Eigenvektoren



instabiler Knoten
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$
Basis von Eigenvektoren

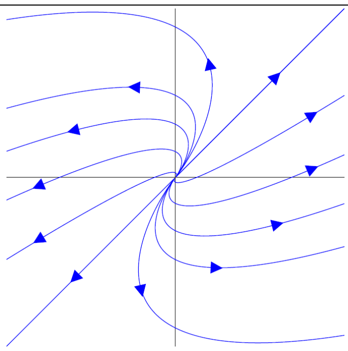


Sattelpunkt
$\lambda_1 \in \mathbb{R}_-, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$

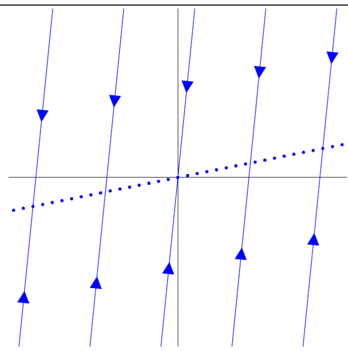


entarteter stabiler Knoten

$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}_-$
eindimensionaler Eigenraum

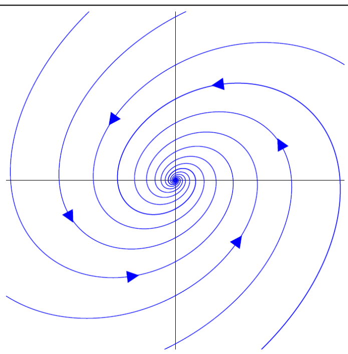


entarteter instabiler Knoten
$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$
eindimensionaler Eigenraum

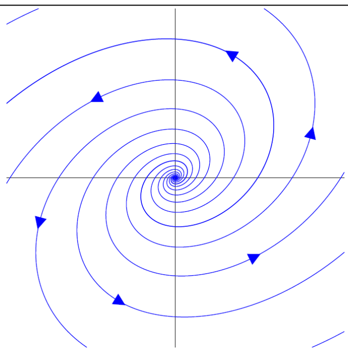


neutral stabiler Knoten

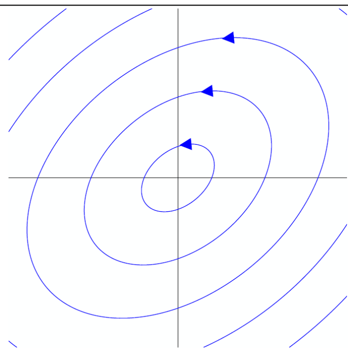
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



stabiler Strudel
$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



instabiler Strudel
$\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



Zentrum
$\operatorname{Re} \lambda_i = 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$

11.6. Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten

Definition 11.11 (charakteristische Gleichung):
Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man auch auf diese Art angehen. Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Man betrachte

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t) \quad (11.7)$$

Dann setzt man $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$ für $i = 1, \ldots, n$ und findet

$$y'(t) = Ay(t) + g(t) \quad (11.8)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ und } g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\det(A - \lambda I) = 0$ und das wird jetzt bei der Entwicklung der Determinante nach der letzte Zeile zu

$$\begin{aligned} & (a_1 - \lambda)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \end{aligned} \quad (11.10)$$

Man nennt (11.10) *die* ***charakteristische Gleichung*** *für* (11.7).

Lemma 11.9:
Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ wie in (11.9). Jeder Eigenwert von A hat geometrische Vielfachheit 1.

Theorem 11.3:
Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ wie in (11.9). Nehme an, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ sind die Eigenwert von A mit algebraischen Vielfachheiten $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$.

- *Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung*

  $$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t)$$

  wie folgt:

  $$x(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t} \quad (11.11)$$

- *Kennt man eine Lösung $\tilde{x}$ von (11.7), dann ist die allgemeine Lösung von (11.7) wie folgt:*

  $$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}$$

Bemerkung 11.5:
Um es nochmals genau zu sagen: die Aussagen bedeuten, dass man jede Lösung x schreiben kann, wie es auf der rechten Seite steht und umgekehrt. Jede Funktion, die man schreiben kann wie so eine rechte Seite, ist eine Lösung.

Bemerkung 11.6:
Die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleicht n. Die Anzahl der Konstanten in (11.11) gleicht auch der Summe der algebraischen Vielfachheiten. Weil die Funktionen $t^m e^{\lambda_i t}$ (linear) unabhängig sind, bilden die Funktionen in (11.11) einen n-dimensionalen Lösungsraum.

Geht man zurück zum System (11.8) mit A und g wie in (11.9), dann findet man für jeden Anfangswert y_0 genau eine Lösung. Die Übersetzung für (11.7) lautet: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat man genau eine Lösung x vom folgenden Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) & = & a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t) \\ x(0) & = & y_0 \\ x'(0) & = & y_1 \\ x''(0) & = & y_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ x^{(n-1)}(0) & = & y_n \end{cases}$$

11.7. Nicht-linear, konstruktiv lösbar, erster Ordnung

11.7.1. Trennbare Differentialgleichungen

Definition 11.12 (trennbare Differentialgleichung):
Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(x(t))g(t)$$

heißt ***trennbar****.*

11.7.2. Homogene Differentialgleichungen

Definition 11.13 (Homogene Differentialgleichung):
Homogene Differentialgleichung *haben die Form*

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Die Substitution $x(t) = \frac{y(t)}{t}$ führt zurück zu einer trennbaren Differentialgleichung. Weil $y(t) = tx(t)$ hat man $y'(t) = x(t) + tx'(t)$, die Differentialgleichung wird $x(t) + tx'(t) = f(x(t))$ und sie lässt sich auch schreiben als $x'(t) = (f(x(t)) - x(t))\frac{1}{t}$. Diese letzte Differentialgleichung ist trennbar.

11.7.3. Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati

Definition 11.14 (Bernoulli):
Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\gamma$$

*mit $\gamma \notin \{0, 1\}$ heißt **Bernoulli**-Gleichung.*

Für $\gamma \in \{0, 1\}$ ist die Differentialgleichung linear.
Wenn man die Substitution $y(t) = (x(t))^p$ versucht, hat man $y'(t) = p(x(t))^{p-1}x'(t)$ und findet

$$p(x(t))^{p-1}x'(t) = a(t)x(t)^p + b(t)(x(t))^{p\gamma} \iff x'(t) = \frac{1}{p}a(t)x(t) + \frac{1}{p}b(t)(x(t))^{p(\gamma-1)+1}$$

Wenn $p(\gamma - 1) + 1 = 0$, d. h. $p = \frac{1}{1-\gamma}$, wird die Gleichung linear

$$x'(t) = (1 - \gamma)a(t)x(t) + (1 - \gamma)b(t)$$

Löse also

$$x'(t) = (1 - \gamma)a(t)x(t) + (1 - \gamma)b(t)$$

und bilde $y(t) = (x(t))^p$ mit $p = \frac{1}{1-\gamma}$.

Definition 11.15 (Riccati):
Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^2 + f(t)$$

*heißt **Riccati**-Gleichung.*

11.7.4. Exakte Differentialgleichungen

Definition 11.16 (exakte Differentialgleichung):
*Eine Differentialgleichung heißt **exakt**, wenn es eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass diese Differentialgleichung aussieht wie*

$$\Big(F(x, y(x))\Big)' = 0$$

Definition 11.17 (orthogonale Familien von Trajektorien):
Die Mengen

$$\{A_c\}_{c\in I} \text{ mit } A_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \alpha(x,y)=c\}$$
$$\{B_c\}_{c\in J} \text{ mit } B_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \beta(x,y)=c\}$$

heißen ***orthogonale Familien von Trajektorien*** *in* $\mathbb{R}^2$*, wenn folgendes gilt:*

1. *Sowohl* $\{A_c\}_{c\in I}$*, als auch* $\{B_c\}_{c\in J}$*, füllt* $\mathbb{R}^2$ *eindeutig aus bis auf höchstens abzählbar viele Punkte*
2. *Wenn sich eine Trajektorie* A_{c_1} *und eine Trajektorie* B_{c_2} *schneiden, dann geschieht dies orthogonal*

Das Wort **Trajektorie** wird benutzt für die Spur einer Lösung der Differentialgleichung.
Wenn $x \mapsto y(x)$ ein A_c (teils) beschreibt, gilt $\alpha(x, y(x)) = c$ und es folgt, dass

$$(\alpha(x, y(x)))' = c' = 0$$

Wenn man die Kurven leichter als Funktion von y beschreiben kann, das heißt $y \mapsto x(y)$ beschreibt ein A_c (teils), dann gilt $(\alpha(x(y), y))' = 0$. Hier ist die Ableitung nach y gemeint.
Wir nehmen an, dass α und auch β in A_c und B_c genügend nette Funktionen sind und dass diese Ableitungen Sinn machen.

12. Grundbegriffe

12.1. Topologische Begriffe

Definition 12.1 (Kugel und Sphäre):
Für $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definiert man

- *die **offene Kugel** $B_r(x_0) := \{y \in X : d(x_0, y) < r\}$*
- *die **abgeschlossene Kugel** $B_r[x_0] := \{y \in X : d(x_0, y) \leq r\}$*
- *die **Sphäre** $S_r(x_0) := B_r[x_0] \setminus B_r(x_0) = \{y \in X : d(x_0, y) = r\}$*

Die Kugeln haben den Radius r und den Mittelpunkt x_0.

Definition 12.2 (offene Menge):
*Eine Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **offen**, wenn es für jedes $x \in O$ eine offene Kugel $B_r(x)$ gibt derart, dass $B_r(x) \subset O$.*
Achtung: Der Radius der Kugel ist hier von x abhängig: $r = r(x)$.

Definition 12.3 (abgeschlossene Menge):
*Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{R}^n \setminus K$ offen ist.*
Allgemein nennt man $K \subset X$ abgeschlossen wenn $K^\complement$ offen ist.

relativ offene und relativ abgeschlossene Mengen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Menge $A \subset U$ nennt man **relativ offen** bezüglich U, wenn es für jedes $a \in A$ ein $r > 0$ gibt mit $\{x \in U : d(x, a) < r\} \subset A$. Eine Menge $K \subset U$ nennt man **relativ abgeschlossen** bezüglich U, wenn $U \setminus K$ relativ offen bezüglich U ist.

Definition 12.4 (Umgebung):
*Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $U \subset \mathbb{R}^n$ eine **Umgebung** von a, wenn es eine offene Kugel $B_r(a)$ gibt derart, dass $B_r(a) \subset U$.*

Definition 12.5 (innere, äußere und Randpunkte):
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

- *a heißt ein **innerer Punkt** von A, wenn es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \subset A$. Man schreibt A° für die **Menge der inneren Punkte** von A*
- *a heißt ein **äußerer Punkt** von A, wenn es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \subset A^\complement$*
- *a heißt ein **Randpunkt** von A, wenn jede Umgebung U von a einen Punkt von A und einen Punkt von $A^\complement$ enthält. Man schreibt ∂A für die **Menge der Randpunkte** von A*

Definition 12.6 (abgeschlossene Hülle):
*Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die **abgeschlossene Hülle** $\overline{A}$ von A wird definiert durch*

$$\overline{A} = A^{\circ} \cup \partial A$$

Die drei Typen von Punkten in Definition 12.5 schließen sich gegenseitig aus und füllen ganz $\mathbb{R}^n$ aus. Genauer gesagt mit $A^{\mathsf{C}\circ} := (A^{\mathsf{C}})^{\circ}$, der Menge der äußeren Punkte hat man:

$$A^{\circ} \cap \partial A = \emptyset, \ A^{\mathsf{C}\circ} \cap \partial A = \emptyset \text{ und } A^{\circ} \cap A^{\mathsf{C}\circ} = \emptyset$$
$$A^{\circ} \cup \partial A \cup A^{\mathsf{C}\circ} = \mathbb{R}^n$$

Wenn A offen ist, dann ist jedes $a \in A$ ein innerer Punkt und es gilt $A^{\circ} = A$.

Definition 12.7 (Häufungs- und isolierter Punkt):
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

- *a heißt ein **Häufungspunkt** von A, wenn jede Umgebung U von a unendlich viele Punkte aus A enthält*
- *a heißt ein **isolierter Punkt** von A, wenn $a \in A$ gilt und es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \setminus \{a\} \subset A^{\mathsf{C}}$*

12.2. Mehrere Veränderliche, Konvergenz, Stetigkeit

12.2.1. Der Limes bei Folgen

Definition 12.8 (Folgen-Konvergenz in $\mathbb{R}^n$):
Sei $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Man sagt $\lim_{m\to\infty} x_m = a$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$m > M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x_m - a\| < \varepsilon$$

12.2.2. Der Limes bei Funktionen

Definition 12.9 (Funktionen-Konvergenz in $\mathbb{R}^n$):
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\ell \in \mathbb{R}^m$. Man sagt $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$0 < \underbrace{\|x - a\| < \delta_\varepsilon}_{x \in B_{\delta_\varepsilon}(a)} \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Definition 12.10:
Sei $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, a ein Häufungspunkt von A und $\ell \in \mathbb{R}^m$. Man sagt $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$x \in (B_{\delta_\varepsilon}(a) \setminus \{a\}) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$$

12.2.3. Stetigkeit

Definition 12.11 (stetige Funktion im $\mathbb{R}^n$):
Sei $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Man sagt f ist stetig in a, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$x \in A \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Man sagt $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ ist stetig, wenn f stetig ist in jedem Punkt $a \in A$.

Algorithmus

Um die Existenz oder Nicht-Existenz des Grenzwertes einer Folge klären geht man am besten wie folgt vor.

1. Kann man f als Zusammensetzung von stetigen Funktion schreiben, so benutze man: Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in A$ und seien $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ Funktionen.
   1. Wenn f und g stetig sind in a, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in a.
   2. Wenn f und g stetig sind in a und $g(a) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.
2. Wenn nicht, betrachte man ein paar geschickt gewählte Folgen

$$\{x^k\}_{k=0}^\infty, \{y^k\}_{k=0}^\infty, \{z^k\}_{k=0}^\infty \dots \text{ in } A$$

   mit $x^k \to a, y^k \to a, z^k \to a, \dots$ für $k \to \infty$ und berechne

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k), \lim_{k\to\infty} f(y^k), \lim_{k\to\infty} f(z^k), \dots$$

   2.1. Wenn es eine solche Folge gibt, wobei $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$ nicht existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a} f(x)$ nicht.
   2.2. Wenn $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \ell_1$ und $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = \ell_2 \neq \ell_1$, dann existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ nicht.
   2.3. Wenn all diese Folgen den gleichen Grenzwert ℓ liefern, kann man vermuten, dass $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Dann beweise man eine Abschätzung

$$\|f(x) - \ell\| \leq \dots \leq \rho(\|x - a\|)$$

   wobei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion ist mit $\lim_{t\downarrow 0} \rho(t) = 0$. Wenn so eine Abschätzung existiert, dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
3. Gelingt so eine Abschätzung nicht, dann zurück zu 2, aber vielleicht erst nachdem Maple oder Mathematica eine Skizze angefertigt hat um zu sehen, was da los ist.

12.3. Noch mehr Dimensionen

12.3.1. Äquivalente Normen bei endlichen Dimensionen

Definition 12.12 (Äquivalenz der Norm):
Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ eines normierten Vektorraums V heißen ***äquivalent****, wenn es zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit*

$$c_1\|x\| \leq |||x||| \leq c_2\|x\| \quad \forall x \in V$$

12.3.2. Limes bei unendlichen Dimensionen

Definition 12.13 (offen in Vektorräumen):
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und $A \subset V$. A heißt ***offen****, wenn es für jedes $a \in A$ ein $r > 0$ gibt mit*

$$B_r(a) := \{x \in V : \|x - a\|_V < r\} \subset A$$

Definition 12.14 (Folgen-Konvergenz in Vektorräumen):
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge in V und sei $x \in V$.

- *Man nennt $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine* ***Cauchy-Folge****, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon\ \forall k, m \in \mathbb{N} : k, m > K_\varepsilon \Rightarrow \|x_k - x_m\|_V < \varepsilon$$

- *Man nennt $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine* ***konvergente Folge*** *und sagt $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N} : k > K_\varepsilon \Rightarrow \|x_k - x\|_V < \varepsilon$$

Definition 12.15:
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und sei $f : D \subset V \to W$ eine Funktion, $a \in D^{HP}$ und $\ell \in W$.

- *Man sagt $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x : (0 < \|x - a\|_V < \delta_\varepsilon \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_W < \varepsilon$$

- *Man sagt f ist* ***stetig*** *in a, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x : (\|x - a\|_V < \delta_\varepsilon \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon$$

12.3.3. Alternativ bei Stetigkeit

Definition 12.16 (Urbild):
Sei $f: A \to B$ eine Funktion und $M \subset B$. Dann bezeichnet man die Menge

$$f^{-1}(M) = \{x \in A \mid f(x) \in M\}$$

*als das **Urbild** von M unter f.*[a]

[a] *vgl.* Definition 5.1

Man bemerke, dass f^{-1} nicht die inverse Abbildung zu f sein muss und auch nicht $\frac{1}{f}$ ist. Definition 12.16 macht sogar Sinn, wenn f nicht invertierbar ist.

Definition 12.17 (relativ offen):
*Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Vektorraum und sei $D \subset V$. Die Menge $O \subset D$ heißt **relativ offen** in D, wenn es eine offene Menge $\tilde{O} \subset V$ gibt mit $\tilde{O} \cap D = O$.*

Die Menge $O \subset D$ ist genau dann relativ offen in D, wenn für jedes $a \in O$ ein $r \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$B_r(a) \cap D \subset O$$

wobei $B_r(a) = \{x \in V : \|x - a\|_V < r\}$.

12.4. Extremum

Definition 12.18 (Minimum und Maximum):
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei $f: D \subset V \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- *Sie hat ein **globales Minimum** in $a \in D$, wenn $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$.*
- *Sie hat ein **strenges globales Minimum** in $a \in D$, wenn $f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$.*
- *Sie hat ein **lokales Minimum** in $a \in D$, wenn es $r > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $\|x - a\|_V < r$*
- *Sie hat ein **strenges lokales Minimum** in $a \in D$, wenn es $r > 0$ gibt mit $f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $\|x - a\|_V < r$*

*Analog definiert man die verschiedenen Sorten des **Maximum**.*

12.5. Kompaktheit

Definition 12.19 (offene Überdeckung):
Sei $A \subset V$ und $\{U_i\}_{i\in I}$ derart, dass

1. $U_i \subset V$ *offen ist für jedes* $i \in I$
2. $\bigcup_{i\in I} U_i \supset A$ ($\{U_i\}_{i\in I}$ *überdeckt* A)

dann heißt $\{U_i\}_{i\in I}$ *eine* ***offene Überdeckung*** *von* A.

Definition 12.20 (kompakt):
$A \subset V$ *heißt* ***kompakt***, *wenn es für jede offene Überdeckung* $\{U_i\}_{i\in I}$ *von* A *endlich viele* $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$ *gibt, die* A *überdecken.*

Definition 12.21 (folgenkompakt):
$A \subset V$ *heißt* ***folgenkompakt***, *wenn jede Folge* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$ *eine konvergente Teilfolge* $\{x_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *hat mit* $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} \in A$.

12.6. Der Begriff Zusammenhang

Definition 12.22 (zusammenhängend):
Sei $A \subset V$ *mit* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter Vektorraum. Die Menge* A *heißt* ***zusammenhängend***, *wenn es keine Mengen* $A_1, A_2 \subset A$ *gibt, die folgendes erfüllen:*

1. A_1 *und* A_2 *sind beide nicht leer und relativ offen bezüglich* A
2. $A = A_1 \cup A_2$ *und* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Definition 12.23 (wegzusammenhängend):
Sei $A \subset V$ *mit* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter Vektorraum. Die Menge* A *heißt* ***wegzusammenhängend***, *wenn es zu jedem* $x, y \in A$ *eine Kurve (stetige Funktion)* $f\colon [0,1] \to V$ *gibt, mit* $f(0) = x,\ f(1) = y$ *und* $f([0,1]) \subset A$.

Definition 12.24 (Zusammenhangskomponente):
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter Vektorraum, sei* $D \subset V$ *und* $x \in D$.

$$K_D = \bigcup \{A \subset D \colon x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

nennt man die ***Zusammenhangskomponente*** *von* D *zu* x.

13. Ableitungen in mehr Dimensionen

13.1. Partielle Ableitungen

Definition 13.1 (partiell differenzierbare Funktion):
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in \mathbb{R}^n$ und e_i der i-te Einheitsvektor:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*Man nennt f **partiell differenzierbar** in a für die i-te Veränderliche, wenn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

existiert. Man schreibt

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

*und nennt $\partial_i f(a)$ die **i-te partielle Ableitung** von f in a.*

Definition 13.2 (Gradient):
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wenn alle n partiellen Ableitungen von f in a existieren, schreibt man

$$\nabla f(a) = \big(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \ldots, \partial_n f(a)\big)$$

*Zum Symbol ∇ sagt man „Nabla“ und $\nabla f(a)$ nennt man den **Gradienten**[a] von f in a.*

[a] *vgl.* Definitionen 28.9 und 28.19

Alternativ schreibt man auch $\frac{\partial f(a)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ oder $\frac{\partial}{\partial x} f(a)$ statt $\partial_x f(a)$.

Definition 13.3 (Jacobimatrix):
Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\partial_i f(a)$, wenn es existiert, ein Spaltenvektor und $\nabla f(a)$ ist eine $n \times m$-Matrix:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*Diese Matrix wird **Jacobimatrix** genannt.*

Definition 13.4 (stationärer Punkt):
*Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$. Wenn für $f\colon D \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla f(a) = 0$, dann nennt man a einen **stationären Punkt** für f.*

13.2. Richtungsableitungen

Definition 13.5 (Richtungsableitung):
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Wenn sie existiert, nennt man

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

die ***Richtungsableitung*** *von f an der Stelle a in Richtung v.*

14. Mehrdimensionale Differentialrechnung

14.1. Differenzierbarkeit

Definition 14.1 (differenzierbare Funktion):
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^m$. Die Funktion f heißt ***differenzierbar*** *in a, wenn es eine lineare Abbildung $M_a\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - (f(a) + M_a(x-a))\|}{\|x-a\|} = 0$$

Man nennt M_a die ***(totale) Ableitung*** *von f in a und $df(a,h) = M_a(h)$ das* ***Differential****.*

Definition 14.2 (Niveaumenge):
Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Urbild von $c \in \mathbb{R}$, also $f^{-1}(\{c\})$, nennt man eine ***Niveaumenge*** *von f. Im Fall $m = 2$ und wenn f differenzierbar ist und $\nabla f(a) \neq 0$, werden wir noch zeigen, dass so eine Niveaumenge in einer Umgebung von a eine Kurve definiert. Oft nennt man die Niveaumenge dann eine* ***Niveaulinie****.*

Definition 14.3 (m-mal differenzierbar):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Man sagt, f ist ***m-mal differenzierbar*** *in a, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| < m$ gilt:*

- *$\partial^\alpha f$ existiert in $B_r(a)$*
- *$\partial^\alpha f$ ist differenzierbar in a*

Achtung: *Wir benutzen hier die Multiindex-Notation (Bemerkung 14.1).*

Bemerkung 14.1 (Multiindex-Notation):
Die **Multiindex-Notation** für $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha \in \mathbb{N}^n$ vereinbart folgende Konventionen:

- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$
- Für $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \in \mathbb{C}^n$ gilt $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ und
- $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$

14.1.1. Zusammenfassung

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $a \in U$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\boxed{\begin{array}{c}\text{die partiellen}\\ \text{Ableitungen}\\ \text{existieren in } B_r(a)\\ \text{und sind stetig in } a\end{array}} \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \boxed{\text{differenzierbar in } a} \arrow[l, "\not\Leftarrow", phantom, shift right] \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \boxed{\text{stetig in } a} \arrow[l, "\not\Leftarrow", phantom, shift right] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{die partiellen Ableitungen}\\ \text{existieren in } a\end{array}} \arrow[ur, "\not\Rightarrow", phantom, shift left] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{die Richtungsableitungen}\\ \text{existieren in } a\end{array}} \arrow[ul, "\not\Rightarrow", phantom, shift right]
\end{tikzcd}$$

Für f differenzierbar in $a \in U$, $u \in \mathbb{R}^m$ mit $\|u\| = 1$ und $dx = (dx_1, \ldots, dx_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\boxed{df(a, dx) = \nabla f(a) \cdot dx} \qquad \boxed{\partial_u f(a) = df(a, u) = \nabla f(a) \cdot u}$$

14.2. Algebraisches Intermezzo

Definition 14.4 (Definitheit):
Sei $M \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

- *Sie heißt* ***positiv definit****, wenn es $c > 0$ gibt derart, dass $\xi \cdot M\xi \geq c\|\xi\|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- *Sie heißt* ***positiv semidefinit****, wenn $\xi \cdot M\xi \geq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- *Sie heißt* ***negativ definit****, wenn es $c > 0$ gibt derart, dass $\xi \cdot M\xi \leq -c\|\xi\|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- *Sie heißt* ***negativ semidefinit****, wenn $\xi \cdot M\xi \leq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- *Sie heißt* ***indefinit****, wenn sie nicht semidefinit ist*

14.3. Zweite Ableitungen und Extrema bei Polynomen

Definition 14.5 (Hesse-Matrix):
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a \in U$. Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar ist, nennt man

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_1\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_m f(a) \\ \partial_2\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_2\partial_m f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m\partial_1 f(a) & \partial_m\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_m\partial_m f(a) \end{pmatrix}$$

die ***Hesse-Matrix*** *von f in a.*

14.4. Approximation durch Polynome

14.4.1. Das Taylorpolynom

Definition 14.6 (Taylorpolynom):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Für eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ definiert man das ***Taylorpolynom m-ter Ordnung bei a*** *durch*

$$T_{m,a}(x) = \sum_{\substack{|\beta| \leq m \\ \beta \in \mathbb{N}^n}} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(a)$$

Achtung: *Wir benutzen hier die Multiindex-Notation (Bemerkung 14.1).*

15. Inverse Funktionen

15.1. Gleichungen lösen durch Approximation

15.1.1. Das Newtonverfahren in $\mathbb{R}$

Das **Newtonverfahren** ist eine Methode zur Funktionswertbestimmung (meistens Nullstellen) einer nichtlinearen Funktion $f(x)$. Wir nehmen an, dass $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügend glatt. Die Taylorentwicklung um $x^{(0)} \in [a,b]$ ergibt:

$$f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \frac{1}{2} f''(\xi^{(0)})(x - x^{(0)})^2$$

wobei $\xi^{(0)}$ zwischen x und $x^{(0)}$ liegt.
Ist $x^{(0)}$ nahe bei der Lösung $x^\star$ und $f''(\xi^{(0)})$ nicht zu groß, dann ist

$$\tilde{f}(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$$

eine gute Approximation an $f(x)$ in einer Umgebung von $x^\star$.

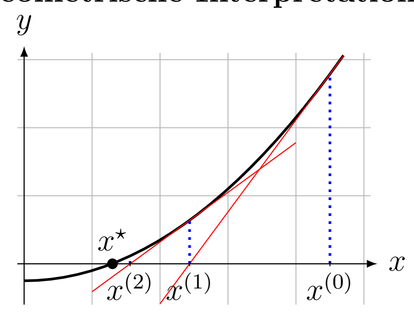
Wir benutzen nun $\tilde{f}(x)$ als Ersatz für $f(x)$ und lösen $\tilde{f}(x) = y$.
Die Lösung verwenden wir dann als erste Näherung an $x^\star$:

$$x = x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{y - f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Zu einem gegebenen Startwert $x^{(0)}$ definiert man dann die Iterierten:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{y - f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

Geometrische Interpretation



15.1.2. Das Newtonverfahren im $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir das Newtonverfahren zur Nullstellensuche einer nichtlinearen Funktion $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $x^\star$ sei eine Nullstelle von f. Unter der Annahme, dass f stetig differenzierbar ist, ergibt die Taylorreihenentwicklung

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \nabla f(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + O\Big(\|x - x^{(0)}\|\Big)$$

für alle x in einer Umgebung von $x^{(0)}$. Hierbei steht $O\big(\|x\|\big)$ für eine Funktion $\varphi(t)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\varphi(\|x\|)}{\|x\|} = 0$.
Setzen wir $x = x^\star$ und nehmen an, dass $x^{(0)}$ nahe genug an der Nullstelle liegt, so erhalten wir die Näherung

$$\begin{aligned}\nabla f(x^{(0)})(x^\star - x^{(0)}) &\approx f(x^\star) - f(x^{(0)})\\ &= -f(x^{(0)})\end{aligned}$$

Wie im Skalaren Fall wählt man nun als nächste Näherung $x^{(1)}$ an $x^\star$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\nabla f(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = -f(x^{(0)})$$

wobei $\nabla f(x^{(0)})$ regulär sein muss.

Dies motiviert die Iterationsvorschrift für das **Newtonverfahren**

$$\boxed{x^{(k+1)} := x^{(k)} - \Big(\nabla f(x^{(k)})\Big)^{-1} f(x^{(k)}), \quad k \geq 0}$$

mit einem Startwert $x^{(0)}$.

15.2. Kontraktionen

Matrixnorm

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\|\cdot\|\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix. Dann heißt

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

die zugeordnete **Matrixnorm**.
Bemerkung: $\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big\|A\frac{x}{\|x\|}\Big\| = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\ \|y\|=1}} \|Ay\|$

Definition 15.1 (Kontraktion):
*$g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **kontrahierend in G** bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ im $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Konstante $0 < q < 1$ gibt, so dass*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in G$$

*Die Konstante q heißt **Lipschitz-Konstante** von g in G und eine Funktion, die diese Gleichung erfüllt, heißt **Lipschitz-stetig**; dabei muss nicht $q < 1$ gelten.*
*Allgemein heißt $x \in G$ ein **Fixpunkt** von g, wenn $g(x) = x$.*

15.3. Umkehrfunktionen

Definition 15.2 (Homöomorphismus):
Eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ nennt man einen ***Homöomorphismus****, wenn f stetig ist und die Umkehrabbildung $f^{\mathrm{inv}}\colon B \to A$ existiert und stetig ist.*

16. Implizite Funktionen

16.1. Implizite Funktionen in 2D

Theorem 16.1 (Satz über implizite Funktionen in 2D):
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $f(a,b) = 0$ und $\partial_2 f(a,b) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $B_r(a) \times B_s(b)$ von (a,b) und eine differenzierbare Funktion $g\colon B_r(a) \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = b$ derart, dass:

- *Für $(x,y) \in B_r(a) \times B_s(b)$ gilt $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$*
- *Für $x \in B_r(a)$ gilt $g'(x) = -\left(\dfrac{\partial_1 f(x,y)}{\partial_2 f(x,y)}\right)_{y=g(x)}$*

Bemerkung 16.1:
Für $x \in B_r(a)$ gilt $f(x, g(x)) = 0$.

17. Integrale in mehreren Dimensionen

17.1. Volumen

Prinzipien eines Volumen

Die geometrisch inspirierten Prinzipien für ein Volumen sind:

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq a$ setzen wir $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}}(a, b) = b - a$ und $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}}(\{a\}) = 0$
2. Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ beide ein Volumen haben, dann gilt
$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A \times B) = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(A)\,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^m}(B)$$
3. Wenn $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beide ein Volumen haben und $A \cap B = \emptyset$, dann gilt
$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(A \cup B) = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(A) + \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(B)$$
4. Wenn $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beide ein Volumen haben und $A \subset B$, dann gilt
$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(B)$$

Wir nennen $B := [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a_i \leq x_i < b_i \ \forall i = 1, \ldots, n\}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \leq b_i$ einen **Block** in $\mathbb{R}^n$.
Wir setzen $\mathrm{vol}\big([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\big) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
Weiterhin definieren wir für $\Omega = \bigcup_{i=1}^k B_i$, wobei $B_1, \ldots, B_k$ paarweise disjunkte Blöcke sind, das Volumen durch Addition der einzelnen Volumen:

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) := \sum_{i=1}^k \mathrm{vol}(B_i)$$

Definition 17.1 (äußeres und inneres Volumen):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge.

- *Wir nennen $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ eine äußere Familie von Blöcken zu Ω, wenn $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^\ell B_i$. Das* ***äußere Volumen*** *von Ω wird definiert als*
$$\mathrm{vol}_a(\Omega) = \inf\left\{\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^\ell B_i\right) \colon \{B_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine äußere Familie von Blöcken zu } \Omega\right\}$$
- *Wir nennen $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell$ eine innere Familie von Blöcken zu Ω, wenn $\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^\ell \tilde{B}_i \subset \Omega$. Das* ***innere Volumen*** *von Ω wird definiert als*
$$\mathrm{vol}_{in}(\Omega) = \sup\left\{\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^\ell \tilde{B}_i\right) \colon \{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine innere Familie von Blöcken zu } \Omega\right\}$$

Definition 17.2 (Volumen):
*Wenn $\mathrm{vol}_a(\Omega) = \mathrm{vol}_{in}(\Omega)$, dann sagen wir „$\Omega$ hat ein **Volumen**“ und schreiben*

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}_a(\Omega) = \mathrm{vol}_{in}(\Omega)$$

17.2. Integrale durch Ober- und Untersummen

Definition 17.3 (Ober- und Untersumme):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit endlichem Volumen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion. Setze $f(x) = 0$ für $x \notin \Omega$.

1. *Wir nennen $O_f \in \mathbb{R}$ eine **Obersumme**, wenn es eine äußere Familie von Blöcken $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$ zu Ω gibt und es $\overline{f}_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, \ell)$ gibt derart, dass*
   1.1. $\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i \supset \Omega$
   1.2. $\overline{f}_i \geq f(x)$ *für* $x \in B_i$
   1.3. $O_f = \sum_{i=1}^{\ell} \overline{f}_i \,\mathrm{vol}(B_i)$
2. *Wir nennen $U_f \in \mathbb{R}$ eine **Untersumme**, wenn es eine innere Familie von Blöcken $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^{\ell}$ zu Ω gibt und es $\underline{f}_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, \ell)$ gibt derart, dass*
   2.1. $\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{B}_i \subset \Omega$
   2.2. $\underline{f}_i \leq f(x)$ *für* $x \in \tilde{B}_i$
   2.3. $U_f = \sum_{i=1}^{\ell} \underline{f}_i \,\mathrm{vol}(\tilde{B}_i)$

Definition 17.4 (R-Integral):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit endlichem Volumen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion. Wir nennen f R-integrierbar über Ω, wenn

$$I_f := \sup\{U_f\colon \text{Untersummen für } f \text{ auf } \Omega\} = \inf\{O_f\colon \text{Obersummen für } f \text{ auf } \Omega\}$$

*und $I_f \in \mathbb{R}$. Wir nennen diese Zahl das **R-Integral** für f auf Ω und schreiben*

$$\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x := I_f$$

Integrale sind hier nur für nichtnegative Funktionen definiert. Für negative Funktionen und Funktionen mit Vorzeichenwechsel betrachtet man f^+ und f^- getrennt. Die Funktionen f^+ und f^- definiert man als

$$f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big) \text{ und } f^-(x) = -\min\big(f(x), 0\big)$$

Es folgt, dass f^+ und f^- nichtnegative Funtionen sind und dass

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Definition 17.5 (R-integrierbar):
*Wir nennen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **R-integrierbar** über Ω, wenn sowohl $\int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x$ als auch $\int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x$ R-integrierbar über Ω sind und setzen*

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

17.3. Alternative Koordinatensysteme

17.3.1. Polarkoordinaten

Definition 17.6 (Polarkoordinaten):
Sei P ein Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wenn $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ derart sind, dass

$$x_1 = r\cos\varphi \text{ und } x_2 = r\sin\varphi$$

*dann nennt man (r, φ) die **Polarkoordinaten** von P.*

17.3.2. Zylinderkoordinaten

Definition 17.7 (Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$):
Sei P ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ derart sind, dass

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi \text{ und } x_3 = z$$

*dann nennt man (r, φ, z) die **Zylinderkoordinaten** von P.*
Allgemein für $\mathbb{R}^n$ siehe Abschnitt 25.3.

17.3.3. Kugelkoordinaten

Definition 17.8 (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$):
Sei P ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$ derart sind, dass

$$x_1 = r\sin\varphi\sin\theta,\ x_2 = r\cos\varphi\sin\theta \text{ und } x_3 = r\cos\theta$$

*dann nennt man (r, φ, θ) die **Kugelkoordinaten** von P.*
Allgemein für $\mathbb{R}^n$ siehe Abschnitt 25.3.

Mathematica-Implementierung im Anhang.

Analysis III

18. Teilmengen und Strukturen

18.1. Topologie, Metrik und Norm

Definition 18.1 (Potenzmenge):
Sei X irgendeine Menge. Die Menge aller Teilmengen von X nennt man ***Potenzmenge*** *$\mathcal{P}(X)$:*

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$$

Bemerkung 18.1:
Der Grund, dass man $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge nennt, ist folgender. Wie $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^{\{1,2,3,4,5\}}$ die Abbildungen von $\{1,2,3,4,5\}$ nach $\mathbb{R}$ beschreibt (die 5 Koordinaten), wird $\{0,1\}^X$ aufgefasst als die Abbildungen von X nach $\{0,1\}$. Man findet eine direkte Bijektion zwischen $\mathcal{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ indem man $A \in \mathcal{P}(X)$ und $f \in \{0,1\}^X$ identifiziert durch

$$A \in X \Leftrightarrow f(x) = 1$$
$$A \notin X \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Definition 18.2 (Topologie):
Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine ***Topologie*** *für X, falls*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$
2. $A_i \in \mathcal{T}$ *für* $i = 1, \dots, k \Longrightarrow \bigcap\limits_{1 \le i \le k} A_i \in \mathcal{T}$
   „Der Schnitt endlich vieler gehört dazu“
3. $A_i \in \mathcal{T}$ *für alle* $i \in I \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
   „Die Vereinigung beliebig vieler gehört dazu“

$(X, \mathcal{T})$ nennt man einen ***topologischen Raum****.*
Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man die ***$\mathcal{T}$-offenen Mengen****.*
Die offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ bilden eine Topologie. Diese Topologie $\mathcal{T}$ nennt man ***Standardtopologie*** *auf $\mathbb{R}^n$.*

Definition 18.3 (Metrik):
Sei X eine Menge und $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die je zwei Elementen x und y aus X einen Abstand $d(x,y)$ zuordnet. Die Abbildung d ist eine ***Metrik****, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt*

1. $d(x,y) \ge 0$
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Das Paar (X,d) heißt dann ***metrischer Raum****.*
Ein vollständiger metrischer Raum wird ***Fréchet-Raum*** *genannt.*

Lemma 18.1:
Wenn $(X, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ ist, dann ist die Abbildung d, definiert durch $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik für X, d. h. (X,d) ist ein metrischer Raum.

Lemma 18.2:
Wenn (X,d) ein metrischer Raum ist, dann ist

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon \forall a \in A \, \exists r \in \mathbb{R}_+ \; U_r(a) \subset A\} \tag{18.1}$$

eine Topologie für X, d. h. $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

$$\text{Norm} \xRightarrow[\text{Lemma 18.1}]{\text{induziert}} \text{Metrik} \xRightarrow[\text{Lemma 18.2}]{\text{induziert}} \text{Topologie}$$

Definition 18.4 (Hausdorff-Eigenschaft):
*Man sagt, dass $(X, \mathcal{T})$ die **Hausdorff-Eigenschaft** hat, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$.*

Satz 18.1:
Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung 18.2:
Anders gesagt: Wenn die Topologie $\mathcal{T}$ auf X durch eine Metrik definiert ist wie in (18.1), dann hat $(X, \mathcal{T})$ die Hausdorff-Eigenschaft.

Bemerkung 18.3:
Ist X eine beliebige Menge, so ist die **diskrete Metrik** $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ auf X definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Die diskrete Metrik ordnet also jedem Paar verschiedener Punkte den identischen Abstand 1 zu.

Definition 18.5 (diskrete Topologie):
*Sei X eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf X ist die Topologie, unter der alle Teilmengen von X offen sind. Ein Raum, der die diskrete Topologie trägt, heißt **diskret**. Die diskrete Topologie wird von der diskreten Metrik induziert.*

Bemerkung 18.4:
Wenn X endlich ist, ist nur die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$ hausdorffsch.

18.2. Basis und Produkt bei Topologien

Definition 18.6 (Basis der Topologie):
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine ***Basis*** *für die Topologie $\mathcal{T}$, wenn es für jedes $T \in \mathcal{T}$ Basiselemente $\{B_i \in \mathcal{B} \colon i \in I\}$ derart gibt, dass $T = \bigcup_{i \in I} B_i$.*

Lemma 18.3:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $T \in \mathcal{T}$ mit $x \in T$ ein Element $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset T$, dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie $\mathcal{T}$.

Definition 18.7 (Produkt-Topologie):
Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Dann definiert man die ***Produkttopologie*** *auf $X_1 \times X_2$ als die kleinste Topologie $\mathcal{T}$, die alle Mengen $T_1 \times T_2$ für $T_1 \in \mathcal{T}_1$ und $T_2 \in \mathcal{T}_2$ enthält. Man schreibt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.*

Lemma 18.4:
Seien $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{T}_m$ die Standardtopologien auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist die Produkttopologie von $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{T}_m$.

18.3. σ-Algebra

Definition 18.8 (σ-Algebra):
Eine Klasse $\mathcal{A}$ von Teilmengen aus X, also $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, heißt eine ***$\sigma$-Algebra*** *über X, falls*

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$
3. $A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$

Die Mengen in $\mathcal{A}$ nennt man ***$\mathcal{A}$-messbar****.*
$(X, \mathcal{A})$ nennt man einen ***messbaren Raum****.*

Definition 18.9 (Produkt-σ-Algebra):
Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Dann definiert man die ***Produkt-σ-Algebra*** *auf $X_1 \times X_2$ als die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$, die alle Mengen $A_1 \times A_2$ für $A_1 \subset \mathcal{A}_1$ und $A_2 \subset \mathcal{A}_2$ enthält. Man schreibt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*

18.4. Borel-σ-Algebra

Definition 18.10 (Borel-σ-Algebra):
Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie. Dann nennt man $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, d. h. die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{T}$ enthält, die zu $(X, \mathcal{T})$ gehörende ***Borel-σ-Algebra****.*

19. Maße

19.1. Stetige Funktionen

Definition 19.1 (stetige Funktion):
Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ zwei topologische Räume. Dann nennt man eine Funktion $f\colon X \to Y$ ***$\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$-stetig****, wenn für jedes $T \in \mathcal{T}$ gilt, dass $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$.*

Lemma 19.1:
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ die durch die Metriken d_X beziehungsweise d_Y definierten Topologien. Dann stimmt die klassische Definition der Stetigkeit mit der von Stetigkeit von topologischen Räumen überein.

19.2. Messbare Funktionen

Definition 19.2 (messbare Funktion):
Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume. Dann nennt man eine Funktion $f\colon X \to Y$ ***$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar****, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Satz 19.1:
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ $\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$-stetig. Dann ist f $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

Lemma 19.2:
Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{A}_\mathcal{S})$ eine σ-Algebra auf X.

Lemma 19.3:
Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt $f^{-1}(\mathcal{A}_\mathcal{S}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$.

19.3. Definition eines Maßes

Definition 19.3 (Maß):
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann heißt $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein (positives) ***Maß****, wenn*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$*
2. *μ ist σ-additiv[a]*

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ nennt man einen ***Maßraum****.*
Wenn außerdem $\mu(X) < \infty$, dann nennt man das Maß μ ***endlich****.*
Wenn $\mu(X) = 1$, nennt man μ ein ***Wahrscheinlichkeitsmaß****.*

[a] *vgl.* Definition 19.4 (Additivität)

Definition 19.4 (Additivität):
Man nennt eine Mengenfunktion $\mu\colon X \to [0,\infty]$

1. ***σ-additiv***, *wenn für jede paarweise disjunkte Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

2. ***additiv***, *wenn für jede paarweise disjunkte Menge $A_1,\dots,A_k \in X$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

Achtung: *σ-Additivität impliziert Additivität.*

Satz 19.2:
Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann gilt für $A,B,A_i \in \mathcal{A}$:

1. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\mu(A\cap B) + \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
3. *Wenn $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, dann ist $\{\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge und*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$
4. *Wenn $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\mu(A_0) < \infty$, dann ist $\{\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge und*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$

19.4. Nullmengen und Vollständigkeit

Definition 19.5 (Nullmenge):
Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Man nennt $A\in\mathcal{A}$ eine ***Nullmenge***, *wenn $\mu(A) = 0$.*
Ein Maßraum heißt ***vollständig***, *wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist.*

Lemma 19.4:
Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wiederum Nullmengen.

Satz 19.3:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Setzt man

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup A_0 \colon A \in \mathcal{A} \text{ und es gibt eine Nullmenge } N \in \mathcal{A} \text{ mit } A_0 \subset N\}$$

und $\overline{\mu}(A \cup A_0) = \mu(A)$, dann gilt

1. *$\overline{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra*
2. *$\overline{\mu}$ ist ein wohldefiniertes Maß*
3. *$(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum*

19.5. Äußeres Maß

Definition 19.6 (Subadditivität):
Man nennt eine Mengenfunktion $\mu \colon X \to [0, \infty]$

1. ***σ-subadditiv***, wenn für alle $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

2. ***subadditiv***, wenn für jede Menge $A_1, \ldots, A_k \in X$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

Definition 19.7 (äußeres Maß):
Eine Abbildung $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ nennt man ein ***äußeres Maß*** auf X, wenn

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \colon A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. μ^* ist σ-subadditiv

Definition 19.8 (Auswahlaxiom):
Wenn $\mathcal{A}$ eine Menge nicht-leerer Mengen ist, dann gibt es eine Auswahlfunktion:
Für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$ kann man ein Element $a \in A$ bestimmen. Anders gesagt:

$$\exists f \colon \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \text{ mit } \forall A \in \mathcal{A} \text{ gilt } f(A) \in A$$

Die meisten Mathematiker nehmen das ***Auswahlaxiom*** als Voraussetzung.
In der Mathematik ist ein ***Axiom*** ein nicht deduktiv ableitbarer und widerspruchsfreier Grundsatz.

Definition 19.9 (Prämaß):
Eine Mengenfunktion $\mu\colon X \to [0,\infty]$ von dem Mengensystem X heißt ***Prämaß****, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ *ist σ-additiv*

Im Gegensatz zu einem Maß muss der Definitionsbereich eines Prämaßes ***keine*** *σ-Algebra sein.*

Ein Prämaß heißt ***σ-endlich****, wenn es eine Zerlegung $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Ω in X gibt, so dass $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.*

Zählmaß

Das **Zählmaß** ist ein spezielles Maß, das Mengen die Anzahl ihrer Elemente zuordnet. Formal lässt sich das Zählmaß auf einem Maßraum $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ definieren.
Das Zählmaß einer Menge $A \subset \Omega$ ist wie folgt definiert:

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich ist} \end{cases}$$

Dirac-Maß

Es sei ein messbarer Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben. Zu jedem Punkt $z \in \Omega$ wird eine zugehörige Abbildung δ_z definiert, die jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ den Wert 1 zuordnet, wenn sie z enthält, und den Wert 0, wenn sie z nicht enthält:

$$\delta_z(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $\delta_z\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ ist dann ein Maß und wird **Dirac-Maß** oder **Punktmaß** im Punkt z genannt. Wegen $\delta_z(\Omega) = 1$ ist δ_z sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_z)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Lemma 19.5:
Seien $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\nu\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ derart, dass:

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$ *und* $\nu(\emptyset) = 0$
2. *X kann mit abzählbar vielen $B_i \in \mathcal{B}$ überdeckt werden:*

$$\exists\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B} \text{ derart, dass } \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = X$$

Dann ist $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(B_i)\colon B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right\}$$

ein äußeres Maß auf X

19.5.1. Das äußere Lebesgue-Maß

Definition 19.10 (äußeres Lebesgue-Maß):
Wir nennen $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ *einen* ***Block*** *in* $\mathbb{R}^n$.
Wir setzen $\operatorname{vol}\big([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\big) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
Sei $\mathcal{B}$ *die Menge aller Blöcke in* $\mathbb{R}^n$. *Wir definieren das äußere Maß* $\lambda_n^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *durch*

$$\lambda_n^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(R_i) \colon R_i \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i\right\}$$

λ_n^* *heißt das* ***n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß*** *auf* $\mathbb{R}^n$.

19.5.2. Äußere Hausdorff-Maße

Definition 19.11 (äußeres Hausdorff-Maß):
Sei $s > 0$, $\varepsilon > 0$ *und* $\mathcal{B}_\varepsilon$ *die Menge aller Kugeln in* $\mathbb{R}^n$ *(inklusive die leere) mit* $r \in [0, \varepsilon]$:

$$B_r(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^n \colon \|x - y\| < r\right\}$$

Wir definieren $h_s^\varepsilon \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *durch*

$$h_s^\varepsilon(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{radius}(B_i))^s \colon B_i \in \mathcal{B}_\varepsilon,\ A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right\}$$

und

$$h_s^*(A) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} h_s^\varepsilon(A)$$

h_s^* *heißt das* ***s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß*** *auf* $\mathbb{R}^n$.

Definition 19.12 (Hausdorff-Dimension):
Wenn es für $S \subset \mathbb{R}^n$ *eine Zahl* $s_d \in [0, n]$ *gibt, so dass*

1. $h_s^*(S) = 0$ *falls* $s > s_d$
2. $h_s^*(S) = \infty$ *falls* $s < s_d$

erfüllt sind, sagt man S *hat* ***Hausdorff-Dimension*** s_d.

Bemerkung 19.1:
Normalerweise werden Hausdorff-Maße über den *Durchmesser* einer Menge definiert, anstatt wie oben über den Radius. Es ist für $E \subset X$

$$d(E) = \sup\{x - y \colon x, y \in E\}$$

der **Durchmesser** von E.

19.6. Vom äußeren Maß zum Maß

Definition 19.13 (μ-messbar):
Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Man nennt $A \in \mathcal{P}(X)$ ***μ^*-messbar****, wenn für jedes $B \in \mathcal{P}(X)$ gilt:*

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^{\complement} \cap B) \leq \mu^*(B)$$

Die Menge aller μ^*-messbaren Mengen wird mit $\mathcal{A}(\mu^*)$ bezeichnet.

Satz 19.4 (Caratheodory):
Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Dann ist $\left(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}\right)$ ein vollständiger Maßraum.

Definition 19.14 (induziertes Maß):
Wenn μ^* ein äußeres Maß auf X ist und $\left(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}\right)$ der zugehörige vollständige Maßraum, dann nennt man $\mu = \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$ das von μ^* ***induzierte Maß****.*

20. Lebesgue-Maß

20.1. Lebesgue-Maß und Borel-Mengen

Definition 20.1 (Lebesque-Maß):
*Sei $X = \mathbb{R}^n$. Das vom äußeren Lebesgue-Maß induzierte Maß nennt man das **Lebesgue-Maß**. Man schreibt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$.*

Satz 20.1:
Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Standardtopologie und sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wie beim Lebesgue-Maß. Dann gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$.

Definition 20.2 (Distanz):
*Die **Distanz** $d\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ definiert man wie folgt:*

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{\|x - y\| \colon x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2\}$$

Außerdem definiert man $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ durch $d(x, \Omega_2) = d(\{x\}, \Omega_2)$.

Lemma 20.1:
Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $d(A_1, A_2) > 0$, dann gilt

$$\lambda^*(A_1 \cup A_2) = \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2)$$

Hier ist λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

20.2. Approximieren von außen und von innen

Satz 20.2:
Für jedes $M \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\lambda(M) = \inf\{\lambda(O) \colon M \subset O \text{ offen}\}$$
$$\lambda(M) = \sup\{\lambda(K) \colon M \supset K \text{ kompakt}\}$$

20.3. Nicht alles ist Lebesgue-messbar

Satz 20.3 (Steinhaus):
Wenn für $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\lambda(A) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$ derart, dass

$$B_\delta(0) \subset A - A := \{x - y \colon x, y \in A\}$$

21. Lebesgue-Integral

21.1. Definition des Lebesgue-Integrals

21.1.1. Für einfache Funktionen

Definition 21.1 (einfache Funktion):
Eine Funktion $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ heißt ***einfach****, wenn $f(X)$ abzählbar ist.*

Definition 21.2 (Indikatorfunktion):
Die Funktion $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Man nennt $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die ***charakteristische*** *oder* ***Indikatorfunktion*** *von $A \subset \mathbb{R}^n$. Oft schreibt man auch $\mathbb{1}_A$ statt χ_A.*

Definition 21.3 (Lebesgue-messbar):
Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt ***$\mathcal{L}_X$-$\mathcal{L}_Y$-messbar****, wenn für alle $B \in \mathcal{L}_Y$ gilt, dass $A := f^{-1}(B) \in \mathcal{L}_X$. (Vergleiche mit Definition 19.2 „messbare Funktion“)*

Mit f^{-1} ist hier Urbild (Definition 12.16) gemeint.

Definition 21.4 (Integral):
Für eine nichtnegative einfache Funktion $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ der Form

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \, \chi_{A_i}$$

mit A_i $\mathcal{L}$-messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, definiert man

$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} \sum\limits_{i \in \mathbb{N} \text{ mit } y_i \in [0,\infty)} y_i \, \lambda(A_i), & \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0 \\ \infty, & \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) > 0 \end{cases}$$

Wir definieren

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ und } f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

Es folgt, dass f^+ und f^- nichtnegative Funtionen sind und dass

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Lemma 21.1:
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ eine einfache $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbare Funktion. Dann sind f^+ und f^- einfache $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbare Funktionen und $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\lambda$ und $\int_X f^- \,\mathrm{d}\lambda$ sind wohldefiniert in $[0, \infty]$.

Definition 21.5 (Lebesgue-integrierbar):
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ eine einfache $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbare Funktion. Man nennt f ***Lebesgue-integrierbar*** auf X, wenn $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\lambda < \infty$ und $\int_X f^- \,\mathrm{d}\lambda < \infty$. Man setzt in diesem Fall

$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int_X f^- \,\mathrm{d}\lambda$$

21.1.2. Für allgemeinere Funktionen

Definition 21.6 (Ober- und Unter-Integral):
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$. Wir definieren das ***obere Integral*** durch

$$\overline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda = \inf\left\{\int_X g \,\mathrm{d}\lambda \colon g\colon X \to \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } f \leq g\right\}$$

und das ***untere Integral*** durch

$$\underline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda = \sup\left\{\int_X g \,\mathrm{d}\lambda \colon g\colon X \to \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f\right\}$$

Lemma 21.2:
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$. Dann gilt

$$\underline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda \leq \overline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda$$

Definition 21.7 (Lebesgue-Integral):
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$. Wenn

$$\overline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda = \underline{\int_X} f \,\mathrm{d}\lambda =: I \in \mathbb{R}$$

heißt f ***Lebesgue-integrierbar über X***. Dieses I nennt man das ***Lebesgue-Integral von f über X*** und man schreibt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda := I$$

Lebesgue-integrierbare Funktionen

Für die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $\mathcal{L}(X)$ oder $\mathcal{L}^1(X)$.

Definition 21.8 (lokal Lebesgue-integrierbar):
*Man nennt eine Funktion $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **lokal Lebesgue-integrierbar auf X**, wenn $f_{|K}\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist. Für die Menge aller lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $\mathcal{L}_{\text{lok}}(X)$ oder $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(X)$.*

Lemma 21.3:
Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty)$. Wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ zwei einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen $g_1, g_2\colon X \to (-\infty, \infty)$ finden kann derart, dass

1. $g_1 \leq f \leq g_2$
2. $\int_X g_2 \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X g_1 \,\mathrm{d}\lambda + \varepsilon$

dann ist f Lebesgue-integrierbar über X und

$$\int_X g_1 \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X f \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X g_2 \,\mathrm{d}\lambda$$

21.2. Von stetig zu integrierbar

Lemma 21.4:
Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar.

$$\begin{array}{ccc}
 & & f \text{ ist } \mathcal{T}\text{-}\mathcal{T}\text{-stetig} \\
 & & \Downarrow \\
f \text{ ist } \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} & \Rightarrow & f \text{ ist } \mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
f \text{ ist } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{L}\text{-messbar} & \Rightarrow & f \text{ ist } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{A}_\mathcal{T}\text{-messbar}
\end{array}$$

Lemma 21.5:
Sei $\lambda(X) < \infty$ und die Funktion $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar über X.

21.3. Kombinationen messbarer Funktionen

Satz 21.1:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f, g, f_k\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar für $k \in \mathbb{N}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$cf,\ f+g,\ fg,\ |f|,\ \min(f,g),\ \max(f,g),\ \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \text{ und } \limsup_{k\to\infty} f_k$$

$\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar. Wenn $g(x) \neq 0$ für $x \in X$ ist auch $\frac{1}{g}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar.

21.4. Von integrierbar zu fast stetig

Lemma 21.6:
Eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$*-messbar.*

Satz 21.2 (Lusin):
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$*-messbar, sei* $A \subset \mathbb{R}^n$*, mit* $A \in \mathcal{L}$ *und* $\lambda(A) < \infty$*, und sei* $\varepsilon > 0$*, dann existiert eine kompakte Menge* $K \subset A$ *derart, dass*

1. $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$
2. $f_{|K}$ *ist stetig*

21.5. Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Lemma 21.7:
Seien $f_1, f_2\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-integrierbar über* X *und sei* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, dann ist* $\alpha f_1 + \beta f_2$ *Lebesgue-integrierbar über* X *und*

$$\int_X \alpha f_1 + \beta f_2 \,\mathrm{d}\lambda = \alpha \int_X f_1 \,\mathrm{d}\lambda + \beta \int_X f_2 \,\mathrm{d}\lambda$$

Lemma 21.8:
Sei $f\colon X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-integrierbar über* X_1 *und über* X_2*. Wenn* $\lambda(X_1 \cap X_2) = 0$*, dann gilt* f *ist Lebesgue-integrierbar über* $X_1 \cup X_2$ *und*

$$\int_{X_1 \cup X_2} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{X_1} f \,\mathrm{d}\lambda + \int_{X_2} f \,\mathrm{d}\lambda$$

Lemma 21.9:
Falls $f_1, f_2\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-integrierbar sind über* X *und* $f_1 \leq f_2$*, dann gilt*

$$\int_X f_1 \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X f_2 \,\mathrm{d}\lambda$$

Lemma 21.10:
Falls $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-integrierbar ist über* X*, dann ist* $|f|$ *Lebesgue-integrierbar über* X *und es gilt*

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\lambda \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\lambda$$

22. Konvergenz in Sorten

22.1. Lebesgue-Klassen

Definition 22.1 (μ-fast-überall):
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktionen. Man sagt

$$f = g \ \boldsymbol{\mu}\textbf{-fast-überall} \text{ auf } A \subset X$$

wenn $\mu\{x \in A\colon f(x) \neq g(x)\} = 0$.
Abgekürzt: $f = g$ μ-f.-ü.

Lemma 22.1:
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}$-messbar. Dann ist $\left(L^1(X), \|\cdot\|_{L^1(X)}\right)$ ein normierter Raum.

22.2. Konvergenz bei messbaren Funktionen

Definition 22.2 (fast-überall-Konvergenz):
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f_k, f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktionen. Man sagt:

$$f_k \to f \text{ für } k \to \infty \ \boldsymbol{\mu}\textbf{-fast-überall} \text{ auf } A \subset X$$

wenn es eine messbare Menge $B \subset A$ gibt mit $\mu(A \setminus B) = 0$ und $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in B$.

Definition 22.3 (Konvergenz in $\mathcal{L}^1(X)$):
*Sei $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man sagt $f_k \to f$ **in $\mathcal{L}^1(X)$**, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} = 0$$

Definition 22.4 (Konvergenz im Maß):
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f_k, f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktionen. Man sagt

$$f_k \to f \ \textbf{nach dem Maß } \boldsymbol{\mu} \text{ auf } A \subset X$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \mu\{x \in A\colon |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Definition 22.5 (gleichmäßige Konvergenz):
Gegeben seien eine Funktionenfolge $(f_n\colon D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ die jeder natürlichen Zahl n eine reellwertige Funktion zuordnet, und eine Funktion f. Alle f_n sowie f seien auf derselben Definitionsmenge D_f definiert. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergiert gleichmäßig gegen f*** *genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D_f} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Man betrachtet hier die absolute Differenz von $f_n(x)$ und $f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich. Die Menge dieser Differenzen ist entweder unbeschränkt oder hat eine kleinste obere Schranke, ein Supremum. Gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f bedeutet, dass dieses Supremum für fast alle n existiert und gegen Null geht, wenn n gegen unendlich strebt.

Man kann diesen Sachverhalt auch anders definieren: Alle Bezeichnungen seien wie oben. Dann ***konvergiert f_n gleichmäßig gegen f*** *genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ und für alle $x \in D_f$ gilt:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definition 22.6 (punktweise Konvergenz):
Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge heißt ***punktweise konvergent*** *gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Man schreibt dann

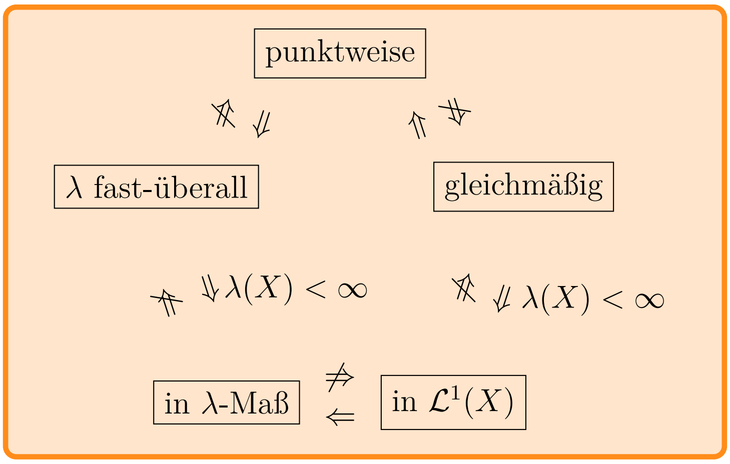
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ punktweise} \quad \text{oder} \quad f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f \ (n \to \infty)$$

Formal ***konvergiert f_n punktweise gegen f*** *genau dann, wenn*

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

das heißt, es muss für jedes x und für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N geben, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$



22.3. Egoroff's Konvergenzsatz

Satz 22.1 (Egoroff):
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f_k, f\colon A \to \mathbb{R}$, mit $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen mit

$$f_k \to f \ \mu\text{-fast-überall auf } A \text{ für } k \to \infty$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $\mathcal{A}$-messbare Menge $B \subset A$ derart, dass

1. $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$
2. $f_k \to f$ *gleichmäßig auf B*

Korollar 22.1.a:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f_k, f\colon A \to \mathbb{R}$, mit $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen. Wenn

$$f_k \to f \ \mu\text{-fast-überall auf } A \text{ für } k \to \infty$$

dann gilt

$$f_k \to f \ \text{ im } \mu\text{-Maß auf } A \text{ für } k \to \infty$$

22.4. Integrale mit Werten in $[0, \infty]$

Lemma 22.2:
Für jede nicht-negative $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $\int_X f \,\mathrm{d}\lambda \in [0, \infty]$. Genauer gesagt, entweder

1. *f ist Lebesgue-integrierbar nach Definition und $\int_X f \,\mathrm{d}\lambda \in [0, \infty)$, oder*
2. *man setzt $\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \infty$, weil*

$$\sup \left\{ \int_X g \,\mathrm{d}\lambda \colon g\colon X \to \mathbb{R}^n \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\} = \infty$$

23. Limes und Integral

23.1. Das Lemma von Fatou

Lemma 23.1 (Das Lemma von Fatou):
Sei $X \in \mathcal{L}$ und $f_k\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\lambda \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\lambda$$

23.2. Monoton oder majorisiert

Satz 23.1 (Monotone Konvergenz):
Sei X $\mathcal{L}$-messbar und $f_k\colon X \subset \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbarer Funktionen:

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_k \le f_{k+1} \le \ldots$$

Dann gilt

$$\int_X \lim_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\lambda$$

Satz 23.2 (Majorisierte Konvergenz):
Sei X $\mathcal{L}$-messbar und $f_k\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbarer Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. *Es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g\colon X \to [0,\infty)$, also $\int_X g \,\mathrm{d}\lambda < \infty$, die die Funktionen $|f_k|$ „majorisiert“: $|f_k| \le g$ λ-fast-überall für alle $k \in \mathbb{N}$*
2. *$f_k \to f$ λ-fast-überall in X für $k \to \infty$*

Dann existiert $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\lambda$ in $\mathbb{R}$ und es gilt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\lambda = \int_X f \,\mathrm{d}\lambda$$

Korollar 23.2.a:
Sei $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^1(X)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ derart, dass $f_{k_i} \to f$ λ-fast-überall.

23.3. Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$

Definition 23.1 (Cauchy-Folge):
Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum und p eine Seminorm[a] auf diesem Vektorraum. Eine Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ heißt ***Cauchy-Folge*** *bezüglich der Seminorm p, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für $k, l \geq N_\varepsilon$ gilt $p(f_k - f_l) < \varepsilon$.*

[a] *vgl.* Definition 10.2 (Norm)

Definition 23.2 (vollständig bezüglich einer Seminorm):
Ein Vektorraum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ heißt ***vollständig bezüglich der Seminorm*** *p, wenn es für jede p-Cauchy-Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ mindestens eine Funktion $f \in V$ gibt, so dass*

$$\lim_{k\to\infty} p(f - f_k) = 0$$

Satz 23.3:
$\mathcal{L}^1(X)$ ist vollständig bezüglich der Seminorm p definiert durch $p(f) = \int_X |f| \,\mathrm{d}\lambda$

Definition 23.3 (Banachraum):
Ein normierter Vektorraum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$, der vollständig ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, heißt ***Banachraum****.*

Definition 23.4 (Dicht):
Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum mit (Semi-)Norm $\|\cdot\|$. Eine Teilmenge $V_0 \subset V$ heißt ***dicht in V*** *bezüglich dieser (Semi-)Norm, wenn es für jedes $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ mindestens ein $v_0 \in V_0$ gibt derart, dass $\|v - v_0\| < \varepsilon$.*

23.4. Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$

Definition 23.5 (Lebesgue-Norm):
Sei $p \in (1, \infty)$. Man definiert die ***Lebesgue-Norm*** *$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ für $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie folgt*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

Man sagt $f \in \mathcal{L}^p(X)$, wenn $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < \infty$.

23.5. Die Ungleichung von Hölder

Satz 23.4 (Die Höldersche Ungleichung):
Sei $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(X)}$$

Lemma 23.2:
Sei $a, b > 0$ *und* $p, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann gilt*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Lemma 23.3:
Sei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *für* $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ *und* $p, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{m} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{m} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{m} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

24. Die Lebesgue-Räume

24.1. Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(X)$

Für eine Lebesgue-messbare Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in (1, \infty)$ wird $\mathcal{L}^p(X)$ definiert als die Menge aller $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbaren Funktionen $f\colon X \subset \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty$$

Satz 24.1 (Die Ungleichung von Minkowski):
Sei $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ mit $p > 1$, dann gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}$$

Satz 24.2:
$\mathcal{L}^p(X)$ ist ein vollständiger Vektorraum bezüglich der $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$-Seminorm.

24.2. Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^\infty(X)$

Definition 24.1 (wesentliche Supremum):
*Sei $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion. Man definiert für $\mathcal{L}$-messbare $A \subset X$ das **λ-wesentliche Supremum** auf A durch*

$$\operatorname{ess-sup}_A f = \inf\Big\{t \in \mathbb{R}\colon \lambda\Big(\{x \in A\colon f(x) > t\}\Big) = 0\Big\}$$

*Ähnlich kann man auch das **λ-wesentliche Infimum** auf A definieren.*

Definition 24.2 ($\mathcal{L}^\infty$-Norm):
*Man definiert die **$\mathcal{L}^\infty$-Norm** $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ für $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie folgt*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} = \operatorname{ess-sup}_X |f|$$

Man sagt $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$, wenn $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} < \infty$.

Lemma 24.1:
Für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$$

Lemma 24.2:
$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^\infty(X)$.

24.3. Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^2(X)$

Induzierte Norm

Wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ ein inneres Produkt[a] ist, dann ist $\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

eine Norm. Diese Norm nennt man die vom Skalarprodukt **induzierte Norm**.

[a] *vgl.* Definition 10.3 (inneres Produkt)

Definition 24.3 (Hilbertraum):
Wenn der Vektorraum $(V,+,\mathbb{R},\cdot)$ ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hat und vollständig ist bezüglich der vom inneren Produkt definierten Norm, nennt man ihn ***Hilbertraum****.*

Lemma 24.3:
Für $(\mathcal{L}^2(X),+,\mathbb{R},\cdot)$ erfüllt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definiert durch

$$\langle u,v\rangle = \int_X uv\,\mathrm{d}\lambda$$

die ersten beiden Bedingungen eines inneren Produktes. Außerdem gilt $\langle v,v\rangle\geq 0$ für alle $v\in V$.

24.4. Stetige lineare Abbildungen

Definition 24.4 (stetig lineare Abbildungen):
Seien $(V,\|\cdot\|_V)$ und $(W,\|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Man schreibt

$$L\Big((V,\|\cdot\|_V),(W,\|\cdot\|_W)\Big)$$

für die ***Menge aller stetig linearen Abbildungen*** *$T\colon(V,\|\cdot\|_V)\to(W,\|\cdot\|_W)$.*

Definition 24.5 (Funktional):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Ein ***Funktional*** *$T$ ist eine Abbildung $T\colon V\to\mathbb{K}$.*

Lemma 24.4:
Seien $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_V)$ und $(W, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *T ist stetig in 0*
2. *T ist stetig auf V*
3. *T ist beschränkt als lineares Funktional:*
   es gibt $M_T \in [0, \infty)$ mit $\|T(v)\|_W \le M_T \|v\|_V$ für alle $v \in V$
4. $\sup\left\{\frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} : v \in V \setminus \{0\}\right\} < \infty$
5. $\sup\{\|T(v)\|_W : \|v\|_V = 1\} < \infty$

Lemma 24.5:
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume. Dann wird

$$\Big(L\big((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)\big), \|\cdot\|\Big)$$

mit

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} : v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

ein normierter Vektorraum.

24.5. Der Darstellungssatz von Riesz

Dualraum

Für einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_V)$ definiert man den **Dualraum** V^* als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $T\colon V \to \mathbb{R}$, oder anders gesagt:

$$V^* = L\big((V, \|\cdot\|_V), (\mathbb{R}, |\cdot|)\big)$$

Korollar:
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist $\|\cdot\|_{V^*}$, definiert durch

$$\|T\|_{V^*} = \sup\{|T(v)| : \|v\|_V = 1\}$$

eine Norm auf V^*.

Satz 24.3 (Der Darstellungssatz von Frigyes Riesz):
Sei $p \in [1, \infty)$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ falls $p \in (1, \infty)$ und $q = \infty$ falls $p = 1$. Dann gilt folgendes:

1. *Für jedes $g \in L^q(X)$ gehört $T_g \colon L^p(X) \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$T_g(f) = \int_X gf \, \mathrm{d}\lambda$$

   zu $(L^p(X))^*$

2. *Für jedes $T \in (L^p(X))^*$ gibt es $g \in L^q(X)$ mit $T(f) = \int_X gf \, \mathrm{d}\lambda$*

Isomorphie

Das Symbol $\simeq$ bezeichnet „ist isomorph zu". **Isomorph** für normierte Vektorräume bedeutet, dass es eine bijektive Abbildung gibt, die die Vektorraumstruktur erhält und die Normen vergleichen lässt. (Vergleiche mit Definition 2.11 „isomorph")

Lemma 24.6:
Für alle $g \in L^q(X)$ gilt

$$\|T_g\|_{(L^p(X))^*} = \|g\|_{L^q(X)}$$

Definition 24.6 (isometrische Isomorphie):
Wenn für eine Isomorphie $\mathcal{I} \colon (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{I}(f)\|_W = \|f\|_V$$

dann nennt man $\mathcal{I}$ eine ***isometrische Isomorphie****.*

25. Berechnen der Integrale

25.1. Fubini und Tonelli

Satz 25.1 (Tonelli):
Für eine $\mathcal{L}_{(n+m)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to [0,\infty]$ gilt:

1. $x \mapsto f(x,y)\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *ist* $\mathcal{L}_{(n)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-*messbar für* $\lambda_{(m)}$-*fast alle* $y \in \mathbb{R}^m$
   $y \mapsto f(x,y)\colon \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ *ist* $\mathcal{L}_{(m)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-*messbar für* $\lambda_{(n)}$-*fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $y \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n)}\colon \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ *ist* $\mathcal{L}_{(m)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-*messbar*
   $x \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(m)}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *ist* $\mathcal{L}_{(n)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-*messbar*
3. $$\begin{aligned}\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n+m)} &= \int_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n)}\right)\mathrm{d}\lambda_{(m)}\\ &= \int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(m)}\right)\mathrm{d}\lambda_{(n)}\end{aligned}$$

Satz 25.2 (Fubini):
Für eine $\mathcal{L}_{(n+m)}$-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ gilt:

1. $x \mapsto f(x,y)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathcal{L}_{(n)}$-*integrierbar für* $\lambda_{(m)}$-*fast alle* $y \in \mathbb{R}^m$
   $y \mapsto f(x,y)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathcal{L}_{(m)}$-*integrierbar für* $\lambda_{(n)}$-*fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $y \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathcal{L}_{(m)}$-*integrierbar*
   $x \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(m)}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist* $\mathcal{L}_{(n)}$-*integrierbar*
3. $$\begin{aligned}\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n+m)} &= \int_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(n)}\right)\mathrm{d}\lambda_{(m)}\\ &= \int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_{(m)}\right)\mathrm{d}\lambda_{(n)}\end{aligned}$$

Satz 25.3:
Für jede Menge $A \in \mathcal{L}_{(n+m)}$ gilt:

1. $A_x := \{y \in \mathbb{R}^m\colon (x,y) \in A\} \in \mathcal{L}_{(m)}$ *für* $\lambda_{(n)}$-*fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $x \mapsto \lambda_{(m)}(A_x)$ *ist* $\mathcal{L}_{(n)}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-*messbar*
3. $\lambda_{(m+n)}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_{(m)}(A_x)\,\mathrm{d}\lambda_{(n)}$

Achtung: *Dieser Satz ist eine Erweiterung des Cavalierischen Prinzips. Das Integral in der dritten Zeile ist in $[0,\infty]$ definiert.*

25.2. Transformationen

Definition 25.1 (Diffeomorphismus):
Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive Abbildung $\Phi\colon X \to Y$ mit Φ und Φ^{inv} $\mathcal{C}^1$-Abbildungen (differenzierbar mit stetiger Ableitung), nennt man ein ***Diffeomorphismus*** von X auf Y.

Lemma 25.1:
Sei $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon X \to Y$ ein Diffeomorphismus, dann gilt für jedes $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit $R \subset X$, dass

$$\lambda\big(\Phi(R)\big) = \int_R |\det \nabla\Phi| \,\mathrm{d}\lambda$$

Lemma 25.2:
Sei $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon X \to Y$ ein Diffeomorphismus, dann gilt für jedes $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subset X$, dass

$$\lambda\big(\Phi(\Omega)\big) = \int_\Omega |\det \nabla\Phi| \,\mathrm{d}\lambda$$

Satz 25.4 (Transformationssatz):
Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi \in \mathcal{C}^1(\overline{X} \to \overline{Y})$ bijektiv mit $\Phi^{inv} \in \mathcal{C}^1(\overline{Y} \to \overline{X})$. Wenn $f \in \mathcal{L}(Y)$, dann gilt

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\lambda = \int_X (f \circ \Phi)|\det \nabla\Phi| \,\mathrm{d}\lambda$$

Satz 25.5 (Erweiterter Transformationssatz):
Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon X \to Y$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Falls $\Omega \subset X$ offen ist, und derart, dass $\Phi_{|\Omega}\colon \Omega \to \Phi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt für jede $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion $f\colon \Omega \to [0, \infty)$, dass

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega (f \circ \Phi)|\det \nabla\Phi| \,\mathrm{d}\lambda$$

25.3. Kugeln und Zylinder

Definition 25.2 (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$):
Kugelkoordinaten *im $\mathbb{R}^n$ kann man beschreiben durch $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ mit*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \cdots \sin\varphi_{n-1} \\ r \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \cdots \sin\varphi_{n-1} \\ r \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 \cdots \sin\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r \cos\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \\ r \cos\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \\ r \cos\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, \infty)$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ und $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \in [0, \pi)$ oder auch durch $x = r\omega$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\omega \in \partial B_1(0)$.

Kugelkoordinaten-Determinante

$$\det\left(\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}\right) = r^{n-1} \cdot \sin^{n-2}\varphi_{n-1} \cdot \sin^{n-3}\varphi_{n-2} \cdot \ldots \cdot \sin^1\varphi_2 \cdot \underbrace{\sin^0\varphi_1}_{=1}$$

Bemerkung 25.1:
Das häufig auftretende Integral von $\sin^n(\varphi)$ lässt sich dabei mit Hilfe

- von Abschnitt 9.9.2 lösen oder
- mittels Gamma-Funktion[a]:
  Für $\operatorname{Re}(n) > -1$ gilt

$$\int_0^\pi \sin^n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

[a] *vgl.* Bemerkung 25.2

Bemerkung 25.2:
Die Gamma-Funktion kann für komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ über das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

definiert werden.

Nützliche Eigenschaften[a] liefert die rekursive Definition

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n!$

[a] Für weitere Eigenschaften und eine erweiterte Definition siehe Abschnitt 42.1 - Die Gamma-Funktion

Zylinderkoordinaten

Verallgemeinerte **Zylinderkoordinaten** bekommt man, indem man Kugelkoordinaten nur auf eine „Teildimension“ anwendet: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und man nimmt Koordinaten $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Lemma 25.3:
Das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist gleich $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$.
Der Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist gleich $\dfrac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$.

Dimension	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen	$B_1(0)$	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\boldsymbol{\frac{8\pi^2}{15}}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^5}{120}$
Oberfläche	$B_1(0)$	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\boldsymbol{\frac{16\pi^3}{15}}$	$\frac{\pi^4}{3}$	$\frac{32\pi^4}{105}$	$\frac{\pi^5}{12}$

26. Mannigfaltigkeiten

26.1. Definition einer Mannigfaltigkeit

Lemma 26.1:
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Gebiete. Wenn $f\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist und $f \in \mathcal{C}^k(U)$ mit $k \geq 2$, dann gilt auch $f^{inv} \in \mathcal{C}^k(V)$.

Definition 26.1 (m-dimensionale Mannigfaltigkeit):
*Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **m-dimensionale Mannigfaltigkeit** in $\mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $x \in M$*

- *eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x existiert*
- *eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert*
- *es einem $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $f\colon U_x \to V$ gibt derart, dass*

$$f(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0, \dots, 0\})$$

Definition 26.2 ($\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit):
*Sei $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Wenn man für jedes $x \in M$ so einen Diffeomorphismus f finden kann mit $f \in \mathcal{C}^k$, dann nennt man M eine **$\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit**.*

Lemma 26.2:
Sei X eine offene Menge in $\mathbb{R}^m$ und $g\colon X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Dann ist der Graph $G = \{(x, g(x))\colon x \in X\}$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m+k}$.

26.2. Heuristik und Mathematik beim Integrieren

Definition 26.3 (Länge):
*Für eine stetig differenzierbare Funktion $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ definiert man die **Länge**[a] als*

$$\ell(x) := \int_0^T |x'(t)| \,\mathrm{d}t$$

[a] *vgl.* Definition 10.8 „Bogenlänge“

Definition 26.4 (Flächeninhalt):
*Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir den **Flächeninhalt** von*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x = t \cdot \alpha + s \cdot \beta \text{ mit } s, t \in [0,1]\} \text{ durch}$$
$$I_2(P) = \sqrt{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta) - (\alpha \cdot \beta)^2}$$

Definition 26.5 (Oberflächeninhalt):
Für eine stetig differenzierbare zweidimensionale Kurve (auch Fläche genannt) $x\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ definiert man den ***Oberflächeninhalt*** *durch*

$$\operatorname{vol}_2^{(n)}(x) = \int_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}} \, \mathrm{d}(t,s)$$

26.3. Parallelepipeden in höheren Dimensionen

Lemma 26.3:
Sei $P = \{t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_m\alpha_m \colon 0 \leq t_i \leq 1 \text{ mit } 1 \leq i \leq m\}$. Dann gilt

$$\operatorname{vol}_m^{(n)}(P) = \sqrt{\det(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{i,j}}$$

mit $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{i,j}$ die $m \times m$-Matrix der Skalarprodukte des m-Beins zu P.

26.4. Integral über eine Mannigfaltigkeit

Definition 26.6 (m-dimensionales Volumen):
Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, die man mit der $\mathcal{C}^1$-Funktion $k\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eindeutig beschreiben kann:

$$M = k(D) := \{x = k(y) \in \mathbb{R}^n \colon y \in D \subset \mathbb{R}^m\}$$

Dann setzt man das ***m-dimensionale Volumen***

$$\operatorname{vol}_m^{(n)}(M) = \int_M f(x)\,\mathrm{d}V_m = \int_D (f \circ k)(y) \sqrt{\det\Big((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{i,j}\Big)(y)}\,\mathrm{d}y$$

Die Funktion k ist eine ***Parametrisierung*** *von M. Die Matrix $\big((\partial_i k(y) \cdot \partial_j k(y))_{i,j}\big)$ nennt man die* ***(erste) Fundamentalmatrix*** *zu der Parametrisierung k an der Stelle $p = k(y)$.*

26.5. Immersionen

Definition 26.7 (Immersion):
Sei $m \leq n \in \mathbb{N}$ und $X \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Abbildung $f \in \mathcal{C}^1(X \to \mathbb{R}^n)$ heißt ***Immersion****, wenn für jedes $x \in X$ die Matrix $\nabla f(x)$ injektiv ist.*

Definition 26.8 (Submersion):
Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Abbildung $f \in \mathcal{C}^1(X \to \mathbb{R}^n)$ heißt ***Submersion****, wenn für jedes $x \in X$ die Matrix $\nabla f(x)$ surjektiv ist. Es folgt $m \geq n \in \mathbb{N}$.*

Für eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen gilt:

$$\operatorname{rang} A = \dim V \iff A \text{ ist injektiv}$$
$$\operatorname{rang} A = \dim W \iff A \text{ ist surjektiv}$$

Deshalb sind Immersionen die Abbildungen, deren Ableitungen $\nabla f(x)$ für alle $x \in X$ injektiv sind, und Submersionen die Abbildungen, deren Ableitungen $\nabla f(x)$ für alle $x \in X$ surjektiv sind.
Insbesondere sind alle Diffeomorphismen sowohl Immersionen als auch Submersionen.

Satz 26.1:
Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f \in \mathcal{C}^k(X \to \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ eine Immersion. Dann existiert für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^m$ derart, dass $f(U_x)$ eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

26.6. Lokale Karten und Parametrisierungen

Definition 26.9 (Atlas):
*Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Man nennt $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ mit $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^1(U_\alpha \to \mathbb{R}^m)$ und $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen einen **Atlas** für M, wenn $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$ (M wird überdeckt von den U_α) und für jede $\alpha, \beta \in A$ gilt:*

- *$\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M}$ ist injektiv*
- *$(\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M})^{inv}\colon V_\alpha \to M$ mit $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap M)$ ist eine Immersion*

Einschränkung

$\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M}$ ist die **Einschränkung** von φ_α auf $U_\alpha \cap M$, d. h. $\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M}\colon U_\alpha \cap M \to \mathbb{R}^m$ ist definiert durch $\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M}(x) = \varphi_\alpha(x)$ für $x \in U_\alpha \cap M$.

Karte

Das Paar $(\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M}, U_\alpha \cap M)$ nennt man **Karte**. Die Funktion $(\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap M})^{\text{inv}}$ ist eine lokale Parametrisierung.

Bemerkung 26.1:
Um die ganze Mannigfaltigkeit betrachten zu können, reicht eine Karte meistens nicht aus. Wandert man zum Beispiel über den Torus, dann muss man gelegentlich die Karte wechseln. Eine Mannigfaltigkeit kann übrigens auch durch mehrere Atlanten beschrieben werden.

26.7. Vektorfelder und Pfaffsche Formen

26.7.1. Der Tangentialraum

Definition 26.10 (Tangentialraum):
Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ (mit $m \leq n$) und sei $p \in M$. Sei ψ eine Immersion mit $\psi(0) = p$, die M lokal parametrisiert, und sei $\mathcal{R}$ der Bildraum (Spaltenraum) von $\nabla\psi(0)$. Man nennt $T_pM = (p, \mathcal{R})$ den ***Tangentialraum*** *an M im Punkt p.*
Ein Element $(p, v) \in T_pM$ nennt man ***Tangentialvektor****.*
Die Vereinigung $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ nennt man das ***Tangentialbündel*** *zu M.*

Satz 26.2:
Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ (mit $m \leq n$) und sei $p \in M$.

- *Für jedes $(p, v) \in T_pM$ gibt es eine Kurve $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$*
- *Wenn es eine Kurve $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n)$ gibt mit $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$ und $\gamma(0) = p$, dann gilt $(p, \gamma'(0)) \in T_pM$*

26.7.2. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Definition 26.11 (Vektorfeld):
Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ (mit $m \leq n$). Eine Abbildung $v\colon M \to TM$ mit $v(p) = (p, v(p)) \in T_pM$ nennt man ***Vektorfeld*** *auf M.*

26.7.3. Der Kotangentialraum

Definition 26.12 (Kotangentialraum):
Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und sei $p \in M$. Den Dualraum T_p^*M zu T_pM nennt man den ***Kotangentialraum*** *an M im Punkt p.*
Ein Element $(p, v) \in T_p^*M$ nennt man ***Kotangentialvektor****.*
Die Vereinigung $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ nennt man das ***Kotangentialbündel*** *zu M.*

26.7.4. Die Pfaffschen Formen

Definition 26.13 (Pfaffsche Form):
Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ (mit $m \leq n$). Eine Abbildung $\alpha\colon M \to T^*M$ mit $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_p^*M$ nennt man ***Pfaffsche Form*** *auf M.*

26.8. Die Dualität zwischen Vektorfeldern und Pfaffschen Formen

Definition 26.14:
Sei $0 < q \leq k \in \mathbb{N}$ und sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Man sagt $f\colon M \to \mathbb{R}^l$ liegt in $\mathcal{C}^q(M \to \mathbb{R}^l)$, wenn für jede lokale Parametrisierung $\psi\colon U_x \to M$, die eine Immersion ist, gilt $f \circ \psi \in \mathcal{C}^q(U_x \to \mathbb{R}^l)$.

Notation:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$.

- Die Vektorfelder $v\colon M \to TM$ mit $v(p) = (p, v(p)) \in T_pM$ und $p \mapsto v(p) \in \mathcal{C}^k(M \to \mathbb{R}^n)$ bezeichnet man mit $\mathcal{V}^k(M)$
- Die Pfaffschen Formen $\alpha\colon M \to T^*M$ mit $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_pM$ und $p \mapsto \alpha(p) \in \mathcal{C}^k(M \to \mathbb{R}^n)$ bezeichnet man mit $\Omega_k(M)$

$$\begin{tikzcd}
\langle T_p^*M, T_pM\rangle_p \to \mathbb{R} \\
p \in M \arrow[u, "\text{Vektorfeld}", bend left] \arrow[u, "\text{Pfaffsche Form}"']
\end{tikzcd}$$

27. Multilineare Algebra

27.1. Antisymmetrische, multilineare Abbildungen

Definition 27.1 (äußere Form):
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Eine Abbildung

$$\omega\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\times} \to \mathbb{R}$$

1. *heißt* ***multilinear****, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ und jedes $v_j \in V$ mit $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ die Abbildung $v_i \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$ linear ist*
2. *heißt* ***antisymmetrisch****, wenn für jedes $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$ und jedes $v_l \in V$ mit $l \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:*

$$\begin{gathered}\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k) \\ = \\ -\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k)\end{gathered}$$

So eine Abbildung ω nennt man eine ***äußere Form von Grad k****. Die Menge aller* ***äußeren k-Formen*** bezeichnet man mit $\Lambda^k(V^*)$.

Lemma 27.1:
Definiert man Addition und Multiplikation mit Skalaren wie üblich. Für $v_i \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2)(v_1, \ldots, v_k) &= \omega_1(v_1, \ldots, v_k) + \omega_2(v_1, \ldots, v_k) \\ (\lambda\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \lambda\omega(v_1, \ldots, v_k)\end{aligned}$$

dann ist $\Lambda^k(V^*)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lemma 27.2:
Für $\dim V = n$ hat man $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

Korollar:
Für $V = \mathbb{R}^n$ hat man $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ genau dann, wenn

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = c \det(v_1, \ldots, v_n)$$

27.2. Das äußere Produkt

Definition 27.2 (äußeres Produkt):
Seien $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^m(V^*)$. Man definiert $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{m+k}(V^*)$ durch

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+m}) = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_{k+m}} \mathrm{sign}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)})$$

Hier sind Perm_{k+m} alle Permutationen von $\{1, \ldots, k+m\}$ und man nimmt

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ gerade Permutation} \\ -1, & \sigma \text{ ungerade Permutation} \end{cases}$$

*Man nennt $\omega \wedge \eta$ das **äußere Produkt** von ω und η.*

*Als äußeres Produkt wird es meistens nur beim Produkt zweier 1-Formen bezeichnet. Allgemein wird es auch **Dach-**, **Keil-** oder **Hutprodukt** genannt.*

Lemma 27.3:
Für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^m(V^*)$ gilt $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{m+k}(V^*)$.

Satz 27.1 (Rechenregeln für das äußere Produkt):
Sei $\omega_{(i)} \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$ und $\nu \in \Lambda^m(V^*)$. Es gilt

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$
3. $(\omega \wedge \eta) \wedge \nu = \omega \wedge (\eta \wedge \nu)$

Satz 27.2:
$\{\varepsilon_I \colon I$ geordneter k-Tupel$\}$ mit $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_k}$ ist eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$.

Definition 27.3 (Einhängung):
*Sei $v \in V$ und $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ mit $k \geq 1$. Dann definiert man die **Einhängung***

$$(v \lrcorner \omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \ldots, v_{k-1})$$

28. Differentialformen

28.1. Ortsabhängige k-Formen

Definition 28.1:
Für eine Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ definiert man $dx_i \in \Lambda((\mathbb{R}^n)^*)$ für $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ durch

$$dx_i(v) = v_i$$

Eine Basis für $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ ist dann

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

Das wiederum heißt, dass jede äußere k-Form ω folgende Gestalt hat

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Definition 28.2 (k-Form):
*Für $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathcal{C}^l(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, nennt man ω eine **k-Form der Klasse $\mathcal{C}^l$ auf U** und schreibt*

$$\omega \in \Omega_l^k(U)$$

Definition 28.3 (Differential):
*Das **Differential** von $f \in \mathcal{C}^{l+1}(U)$ mit $l \geq 1$ für ein offenes $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert man durch*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Bemerkung 28.1:
Da man eine Funktion auf U auch als Nullform auffassen kann, gilt $\Omega_{l+1}^0(U) = \mathcal{C}^{l+1}(U)$.

28.2. Allgemeines Skalarprodukt

28.2.1. Definition des Skalarproduktes

Standardskalarprodukt

Für $V = \mathbb{R}^n$ wird $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Wir bezeichnen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als **Standardskalarprodukt**[a].

[a] *vgl.* Definition 10.3 (inneres Produkt)

Definition 28.4 (nicht-ausgeartetes Skalarprodukt):
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Die Abbildung $g \colon V \times V \to \mathbb{R}$ nennt man ein ***nicht-ausgeartetes Skalarprodukt****, wenn folgendes erfüllt ist:*

1. $(v_1, v_2) \mapsto g(v_1, v_2)$ *ist* ***multilinear***
2. g *ist* ***symmetrisch****:* $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$
3. g *ist* ***nicht-ausgeartet****:* $g(v, w) = 0$ *für alle* $v \in V$ *impliziert* $w = 0$

Lemma 28.1:
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei $g \colon V \times V \to \mathbb{R}$ multilinear und symmetrisch. Dann sind äquivalent:

1. g *ist nicht-ausgeartet*
2. *für jede Basis B für V gilt* $\det(M_B(g)) \neq 0$
3. *es gibt eine Basis* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *mit*

$$\begin{cases} g(b_i, b_j) = 0 & \forall i \neq j \\ g(b_i, b_j) \neq 0 & \forall i = j \end{cases}$$

4. *es gibt eine Basis B für V derart, dass*

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{28.1}$$

d. h., $M_B(g)$ ist eine Diagonalmatrix mit nur 1 *und* -1 *auf der Diagonalen*

Signatur des Skalarprodukts

Nennen wir die Zahl der positiven Eigenwerte p und die Zahl der negativen q, dann ist das Paar (p, q) die **Signatur** des Skalarproduktes g auf der Basis B.

Definition 28.5 (Standardbasis):
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf V.

1. *Eine Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ derart, dass $M_B(g)$ ist wie in (28.1), nennen wir eine* ***Standardbasis für V bezüglich g***
2. *Die zugehörige Standardbasis für V^* ist dann $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ mit*

$$dx_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

28.2.2. Skalarprodukt für den Dualraum

Definition 28.6 (Skalarprodukt des Dualraum):
Sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt und $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis für V. Dann definiert man das ***Skalarprodukt für den Dualraum***
$\overline{g}\colon \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V^*) \to \mathbb{R}$ mit $g^{i,j} = (M_B(g)^{-1})_{i,j}$ wie folgt:

$$\overline{g}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \omega_1(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \omega_2(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

für $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V^*)$.

28.2.3. Volumenform und Orientierung

Definition 28.7 (Volumenform):
Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g und sei $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Standardbasis mit $M_B(g)$ wie in (28.1). Dann nennt man $\mathrm{d}V \in \Lambda^n(V^*)$, definiert durch

$$\mathrm{d}V(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} g(v_1, e_1) & \cdots & g(v_n, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_1, e_n) & \cdots & g(v_n, e_n) \end{pmatrix}$$

die ***Volumenform*** *zu g.*

28.2.4. Hodge-Operator

Definition 28.8 (Hodge-Operator):
Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g. Für $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ definiert man $*\omega \in \Lambda^{n-m}(V^*)$ als die eindeutige $(n-m)$-Form derart, dass

$$\omega \wedge \eta = \overline{g}(*\omega, \eta)\,\mathrm{d}V \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*)$$

Man nennt $*\colon \Lambda^m(V^*) \to \Lambda^{n-m}(V^*)$ den ***Hodge-Operator****.*

Lemma 28.2:
Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g. Dann gilt

1. *Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Standardbasis für V wie in Lemma 28.1.4 und seien $\varepsilon_i \in \Lambda^1(V^*)$ derart, dass $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Für eine Permutation σ auf $\{1, \ldots, n\}$ mit*

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(m) \text{ und } \sigma(m+1) < \sigma(m+2) < \cdots < \sigma(n)$$

   gilt

$$*(\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(m)}) = \\ (-1)^q \operatorname{sign}(\sigma) g^{\sigma(m+1)\sigma(m+1)} \cdots g^{\sigma(n)\sigma(n)} (\varepsilon_{\sigma(m+1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(m+2)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)})$$

2. *Sei $\omega \in \Lambda^m(V^*)$. Dann gilt*

$$* * \omega = (-1)^{m(n-m)+q} \omega$$

3. *Seien $\omega, \eta \in \Lambda^m(V^*)$. Dann gilt*

$$\overline{g}(*\omega, *\eta) = (-1)^q \overline{g}(\omega, \eta)$$

28.3. Wieso?

Warum all dieses? Wir möchten das Werkzeug bereitlegen, um auch bei Mannigfaltigkeiten zugehörende Integrale auf passende Weise festzulegen und gegebenenfalls auch zu berechnen. Verwendet man Differentialformen, dann sieht die allgemeine Form des Satzes von Stokes harmlos aus:

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

Hier ist M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ mit $(m-1)$-dimensionalem Rand ∂M und $\omega \in \Omega_{l+1}^{m-1}(M)$. In einer Dimension sieht dieser Satz übrigens wie folgt aus:

$$\int_a^b d\omega = \omega(b) - \omega(a)$$

28.4. Gradient, Divergenz und Rotation in $\mathbb{R}^n$

Definition 28.9 (Gradient):
*Der **Gradient** für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definition 28.10 (Divergenz):
*Die **Divergenz**[a] für $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$*

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

[a] *vgl.* Definition 28.20

Definition 28.11 (Rotation):
*Die **Rotation**[a] für $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n)$*

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & v_1 & e_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & v_2 & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & v_3 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ -\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

[a] *vgl.* Definition 28.21

Definition 28.12 (Laplace-Operator):
*Der **Laplace-Operator** für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$*

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 f + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f$$

28.5. Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

Lemma 28.3:
Wenn $\psi \colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist, $M = \psi(A)$ eindeutig parametrisiert ist, und wenn v ein Vektorfeld auf M ist und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential, dann gilt

$$\iint_M v \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \iint_A (v \circ \psi)(x, y) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Das Dreibein $\left\{n, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right\}$ soll positiv orientiert[a] sein; n ist ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf M.

[a] Wir nennen das Dreiben $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^3$ positiv orientiert, wenn $\langle a \times b, c\rangle > 0$

Satz 28.1 (Gauß in 3 Dimensionen):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in \mathcal{C}^1$. Sei $v \in \mathcal{C}^1(\overline{U} \to \mathbb{R}^3)$ und sei n der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iiint_U \nabla \cdot v \, \mathrm{d}\lambda = \iint_{\partial U} v \cdot n \, \mathrm{d}\sigma$$

Satz 28.2 (Gauß in n Dimensionen):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in \mathcal{C}^1$. Sei $v \in \mathcal{C}^1(\overline{U} \to \mathbb{R}^3)$ und sei n der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \nabla \cdot v \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} v \cdot n \, \mathrm{d}\sigma$$

Korollar 28.2.a:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in \mathcal{C}^1$. Sei $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{U})$ und sei n der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \big((\Delta f)g - f(\Delta g)\big) \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g - f \frac{\partial g}{\partial n}\right) \mathrm{d}\sigma$$

Achtung: $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$.

Satz 28.3 (Stokes klassisch):
Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$. Sei $v \in \mathcal{C}^1(\overline{U} \to \mathbb{R}^3)$ und sei n ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf M und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iint_M (\nabla \times v(x)) \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial M} v(x) \cdot \tau \, \mathrm{d}s$$

wobei der Tangentialvektor τ sich zu n links herum dreht.

28.6. Differentialformen zurückziehen und ableiten

28.6.1. Funktionen auf Differentialformen

Definition 28.13 (zurückgezogene k-Form):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^{l+1}(U \to \mathbb{R}^m)$. Man definiert für $\omega \in \Omega_l^k(\mathbb{R}^m)$ die ***von f zurückgezogene k-Form*** $f^*(\omega) \in \Omega_l^k(\mathbb{R}^n)$ durch

$$f^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f'(p)v_1, \ldots, f'(p)v_k)$$

Lemma 28.4:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^{\ell+1}(U \to \mathbb{R}^m)$. Dann gilt:

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$ *für* $\omega, \eta \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$
2. $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$ *für* $\omega \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$ *und* $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m)$
3. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$ *für* $\omega \in \Omega_\ell^{k_1}(\mathbb{R}^m)$ *und* $\eta \in \Omega_\ell^{k_2}(\mathbb{R}^m)$

28.6.2. Differentialformen differenzieren

Definition 28.14 (äußeres Differential):
Sei $\omega \in \Omega_l^k(U)$ *mit* $l \geq 1$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Das ***äußere Differential*** $d\omega$ *definiert man durch*

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial x_j} dx_j}_{\text{Differential}} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Lemma 28.5 (Rechenregeln für das Differential):
Es gilt:

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ *für* $\omega, \eta \in \Omega_\ell^k(U)$ *mit* $\ell \geq 1$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k_1} \omega \wedge d\eta$ *für* $\omega \in \Omega_\ell^{k_1}(U)$ *und* $\eta \in \Omega_\ell^{k_2}(U)$ *mit* $\ell \geq 1$
3. $dd\omega = 0$ *für* $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ *mit* $\ell \geq 2$
4. $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ *für* $f \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^m)$ *und* $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ *mit* $\ell \geq 1$

28.7. Geschlossene und exakte Differentialformen

Definition 28.15 (geschlossene & exakte Differentialform):
Sei $\omega \in \Omega_l^k(U)$ *mit* $l \geq 1$.

- *Diese k-Form ω heißt* ***geschlossen***, *wenn* $d\omega = 0$
- *Diese k-Form ω heißt* ***exakt***, *wenn* $\eta \in \Omega_l^{k-1}(U)$ *existiert mit* $d\eta = \omega$

sternförmiges Gebiet

Ein Gebiet U heißt **sternförmig**, wenn es $a \in U$ gibt derart, dass für jedes $x \in U$ gilt, dass $[a, x] \subset U$.

Satz 28.4 (Das Lemma von Poincaré):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und offen und $l \geq 1$. Für jede geschlossene k-Form $\omega \in \Omega_l^k(U)$ gibt es eine $(k+1)$-Form $\eta \in \Omega_l^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$.

Bemerkung 28.2:
Für eine k-Form $\omega \in \Omega_l^k(U)$ gilt

immer:	exakt $\Rightarrow$ geschlossen (Lemma 28.5.3)
im Allgemeinen:	exakt $\not\Leftarrow$ geschlossen
wenn U *sternförmig* ist:	exakt $\Leftarrow$ geschlossen (Satz 28.4)

28.8. Integration von Differentialformen

Definition 28.16 (reguläre Parametrisierung):
*Wir nennen (ψ, U) mit $U \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi\colon U \to M$ eine **reguläre Parametrisierung** der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn $\psi \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^n)$, $\psi(U) = M$, ψ im Innern von U eindeutig ist und $\psi_{|U^\circ}$ eine Immersion ist.*

Definition 28.17:
Sei $B := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ ein Block und sei $\psi \in \mathcal{C}^1(B \to \mathbb{R}^m)$ eine reguläre Parametrisierung von M. Für $\omega \in \Omega_1^n(M)$ gibt es genau ein $f \in \mathcal{C}(B)$ mit

$$\psi^*(\omega) = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

und man setzt

$$\int_{M,\psi} \omega = \int_B f \,\mathrm{d}\lambda_n$$

wobei das rechte Integral das n-dimensionale Lebesgue-Integral ist.

28.9. Bedeutung des Integrals

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Man möchte, dass

- $\displaystyle\int_{M,\psi} 1 \,\mathrm{d}M$ den m-dimensionalen Flächeninhalt von M darstellt, und
- $\displaystyle\int_{M,\psi} g \,\mathrm{d}M$ die m-dimensionale Masse von M mit Gewichtung g darstellt.

Wobei $g\colon M \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion ist, die man **Dichte** oder **Massendichte** nennt.

Satz 28.5 (Allgemeiner Transformationssatz):
Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, die durch $\psi \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^n)$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ eindeutig parametrisiert wird, dann findet man für $g \colon M \to \mathbb{R}$, dass

$$\int_{M,\psi} g \,\mathrm{d}M = \int_U (g \circ \psi) \sqrt{\det\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)_{i,j}} \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m$$

Hier ist $\mathrm{d}M$ eine Standardvolumenform auf der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit der gleichen „Orientierung“ wie $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m$ in $\mathbb{R}^m$.

Lemma 28.6:
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^m$ und sei $\mathrm{d}M$ die Volumenform. Sei $N \subset M$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nehme an $n(x) \in T_pM$ ist ein Normaleneinheitsvektor zu T_pN, das heißt $n(x) \cdot \tau = 0$ für alle $\tau \in T_pN$ und $n(x) \cdot n(x) = 1$. Dann ist

$$\mathrm{d}N = (n \lrcorner \mathrm{d}M)_{|TN}$$

eine Volumenform auf N.

Bemerkung 28.3:
Wenn man eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit M einschränkt, bekommt man meistens einen Rand, der eine $m-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Lemma 28.6 gibt eine Möglichkeit beide zugehörigen Volumenformen zu vergleichen.

28.10. Gradient, Divergenz und Rotation auf Mannigfaltigkeiten

Definition 28.18 (duale Differentialform):
Für ein Vektorfeld $v \colon M \to TM$ wird die ***zum Vektorfeld duale Differentialform*** *ω_v vom Grad 1 definiert durch*

$$*\omega_v = v \lrcorner dM$$

Bemerkung 28.4:
Weil der Hodge-Operator bijektiv ist, ist diese Definition eindeutig. Umgekehrt gilt auch, dass es zu jeder 1-Form ω genau ein Vektorfeld $v \colon M \to TM$ gibt derart, dass $v \lrcorner dM = *\omega$ gilt.

Definition 28.19 (Gradient):
Für $f \in \mathcal{C}^1(M \to \mathbb{R})$ wird der ***Gradient*** *$\operatorname{grad} f \colon M \to TM$ definiert durch*

$$\omega_{\operatorname{grad} f} = df$$

Definition 28.20 (Divergenz):
Für $v \in \mathcal{C}^1(M \to TM)$ wird die ***Divergenz*** *$\operatorname{div} v \colon M \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$d(v \lrcorner dM) = (\operatorname{div} v) dM$$

Definition 28.21 (Rotation):
Sei $m = 3$ (also M ist eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit) und $v \in \mathcal{C}^1(M \to TM)$. Dann wird die ***Rotation*** $\operatorname{rot} v\colon M \to TM$ *definiert durch*

$$*\omega_{\operatorname{rot} v} = d\omega_v$$

Lemma 28.7:
Sei $n = 3$ (also $M \subset \mathbb{R}^m$ ist eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit) und $f \in \mathcal{C}^2(M \to \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^2(M \to TM)$. Dann gilt

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$
2. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = (0, 0, 0)$

Lemma 28.8:
Sei U eine sternförmige offene Menge von $\mathbb{R}^3$ und $v \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^3)$.

1. *Wenn* $\operatorname{rot} v = 0$, *dann existiert* $f \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R})$ *mit* $v = \operatorname{grad} f$
2. *Wenn* $\operatorname{div} v = 0$, *dann existiert* $w \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^3)$ *mit* $v = \operatorname{rot} w$

29. Gauß und Stokes

29.1. Integrale und Randintegrale

Definition 29.1:
Sei $B := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein Block und sei $\psi \in \mathcal{C}^1(B \to \mathbb{R}^m)$ eine reguläre Parametrisierung von M. Man setzt

$$\begin{aligned} B_{(i,0)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{a_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ B_{(i,1)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{b_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Sei $\psi_{(i,j)} = \psi_{|B_{(i,j)}}$ und $M_{(i,j)} = \psi(B_{(i,j)})$. Dann definiert man für $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$

$$\int_{\partial(M,\psi)} \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left(\int_{M_{(i,1)}, \psi_{(i,1)}} \omega - \int_{M_{(i,0)}, \psi_{(i,0)}} \omega \right)$$

Definition 29.2 (orientierbare Mannigfaltigkeit):
Eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit M heißt ***orientierbar****, wenn sie eine stetige Differentialform vom Grad m besitzt, die nirgends verschwindet.*

29.2. Beweis des Stokeschen Satzes

Satz 29.1 (Stokes (fast) allgemein):
Sei $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ und sei $\{(\psi_i, B_i) \colon 1 \le i \le N\}$ eine eindeutige Parametrisierung für die k-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit $M = \bigcup_{1 \le i \le N} \psi_i(B_i)$. Dann gilt

$$\int_{M, \{\psi_i\}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega$$

Achtung: *Eigentlich sollte man $\int_{\partial(M,\{\psi_i\})} \omega_{|TM}$ statt $\int_{\partial(M,\{\psi_i\})} \omega$ schreiben.*

Funktionentheorie

30. Rechnen und Differenzieren in $\mathbb{C}$

30.1. Komplexe Zahlen

Zur Wiederholung lese man die Kapitel 3 und 6 und wiederhole

- Definition 5.5 (rationale Funktion)
- Definition 7.1 (Limes für Funktionen)
- Definition 7.4 (stetige Funktion)
- Definition 8.1 (differenzierbar)
- Definition 9.7 (komplexer Logarithmus)

30.2. Bekannte Funktionentypen

30.2.1. Polynome

Theorem 30.1 (Fundamentalsatz der Algebra[a]):
Sei p ein Polynom vom Grad n wie in Definition 3.3. Dann gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

[a] *vgl.* Abschnitt 3.4 (Theorem 3.1)

30.2.2. Potenzreihen

Theorem 30.2:
Sei $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $R_a \in [0, \infty]$ derart, dass

1. *Wenn $|z| < R_a$, dann konvergiert diese Potenzreihe (sogar absolut)*
2. *Wenn $|z| > R_a$, dann divergiert diese Potenzreihe*

Konvergenzradius $R = \infty$:

1. Exponentialfunktion: $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$
2. Cosinus: $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
3. Sinus: $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
4. Cosinus hyperbolikus: $\cosh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$
5. Sinus hyperbolikus: $\sinh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
6. Besselfunktionen der ersten Art: $J_m(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n!(n+m)!} z^{2n+m}$ für $m \in \mathbb{N}$

Konvergenzradius $R = 1$:

7. Binomialreihe: $\operatorname{bin}(s, z) = (1+z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$
8. Logarithmusreihe: $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

30.3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

30.3.1. Definitionen

Definition 30.1 (Limes):
Sei $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $\alpha \in \overline{A}$. Dann schreibt man $\lim\limits_{A \ni z \to a} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \forall z \in A\colon 0 < |z - \alpha| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

Definition 30.2 (Stetigkeit):
*Die Funktion $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **stetig** in $\alpha \in A$, wenn $\lim\limits_{A \ni z \to a} f(z) = f(\alpha)$.*

Definition 30.3 (Differenzierbarkeit):
*Sei $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $\alpha \in A^{\circ}$. Dann heißt f **(komplex) differenzierbar** in α, wenn*

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \in \mathbb{C} \text{ existiert}$$

*Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** und wird notiert mit $f'(\alpha)$ oder auch mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(\alpha)$.*

30.3.2. Vergleich komplexer und reeller Differenzierbarkeit

Theorem 30.3:
Sei f definiert in einer Umgebung von $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.

- *$z \mapsto f(z)$ ist (komplex) differenzierbar in α*
- *$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + \imath y) \\ \operatorname{Im} f(x + \imath y) \end{pmatrix}$ ist (reell) differenzierbar in $a := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha \\ \operatorname{Im} \alpha \end{pmatrix}$ und*

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ \operatorname{Im} f \end{pmatrix} (a) = \imath \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ \operatorname{Im} f \end{pmatrix} (a)$$

Definition 30.4 (holomorph):
*Sei A eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph** auf A wenn sie in jeden $\alpha \in A$ komplex differenzierbar ist.*
Eine Funktion $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in $\alpha \in A$, wenn sie in einer Umgebung von α komplex differenzierbar ist.

31. Elementares zu Funktionen in $\mathbb{C}$

31.1. Potenzreihen und Differenzieren

Lemma 31.1:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ sind gleich.

Satz 31.1:
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und sei R_a der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist die Funktion $f\colon B_{R_a}(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $B_{R_a}(0)$ und

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}(a_n z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

31.2. Inverse Funktion und Graphische Darstellung

Für Funktionen $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt folgendes:
Wenn f stetig differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$, dann gibt es eine stetig differenzierbare inverse Funktion $f^{\text{inv}}\colon f[a,b] \to \mathbb{R}$. Außerdem gilt

$$(f^{\text{inv}})'(y) = \frac{1}{f'(f^{\text{inv}}(y))} \text{ für } y \in f[a,b]$$

Satz 31.2:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist in $\alpha \in U$, f' stetig und $f'(\alpha) \neq 0$, dann gibt es lokal eine inverse Funktion g. Genauer gesagt:

Es gibt $s > 0$ derart, dass $f\colon B_s(\alpha) \to f\big(B_s(\alpha)\big)$ bijektiv ist und dass $f\big(B_s(\alpha)\big)$ eine offene Umgebung von $f(\alpha)$ ist.

Für die inverse Funktion $g := f^{inv}\colon f\big(B_s(\alpha)\big) \to B_s(\alpha)$ gilt

$$g'\big(f(\alpha)\big) = f'(\alpha)^{-1}$$

31.3. Einige elementare Funktionen

Wir legen fest, dass wir z^α nur schreiben im Fall, dass
1. $\alpha \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z^0 = 1$ für alle z
2. $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
3. $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}_+$
4. $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z = \mathrm{e}$

Lemma 31.2:
Sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es $k \in \{-1, 0, 1\}$ derart, dass

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + 2k\pi\imath$$

31.4. Gebrochen-lineare Funktionen

31.4.1. Gebrochen-lineare Funktionen auf $\hat{\mathbb{C}}$

Lemma 31.3:
Seien $f^\star, g^\star \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ gebrochen-lineare Funktionen mit $f^\star$ wie in (3.3) und $g^\star(z) = \dfrac{\tilde{\alpha} z + \tilde{\beta}}{\tilde{\gamma} z + \tilde{\delta}}$. Dann findet man

$$(f^\star \circ g^\star)(z) = \frac{(\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\gamma})z + (\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\delta})}{(\gamma\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma})z + (\gamma\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta})}$$

und $(\alpha\tilde{\alpha}+\beta\tilde{\gamma})(\gamma\tilde{\beta}+\delta\tilde{\delta}) \neq (\alpha\tilde{\beta}+\beta\tilde{\delta})(\gamma\tilde{\alpha}+\delta\tilde{\gamma})$. Also ist auch $f^\star \circ g^\star$ eine gebrochen-lineare Funktion.

Korollar 31.3.a:
Wenn $f^\star \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine gebrochen-lineare Funktion ist, dann existiert $(f^\star)^{inv} \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ und $(f)^{inv}$ ist eine gebrochen-lineare Funktion.

31.4.2. Eigenschaften von gebrochen-linearen Funktionen

Theorem 31.1:
Gebrochen-lineare Funktionen bilden Kreise und Geraden ab auf Kreise und Geraden.

Lemma 31.4:
Sei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|^2 > c_1 c_2$ und setze

$$M = \{z \in \mathbb{C} \colon c_1 z\overline{z} - \overline{\beta} z - \beta\overline{z} + c_2 = 0\}$$

1. *Für $c_1 \neq 0$ und $|\beta|^2 > c_1 c_2$ beschreibt M einen Kreis in $\mathbb{C}$*
2. *Für $c_1 = 0$ und $\beta \neq 0$ beschreibt M eine Gerade in $\mathbb{C}$*
3. *Jeden Kreis und jede Gerade in $\mathbb{C}$ kann man auf diese Art darstellen*

32. Fraktale und Kurven

32.1. Kurven

Definition 32.1 (Kurve):
Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nennt man eine ***(komplexe) Kurve****.*
$\gamma(a)$ heißt ***Anfangspunkt*** *und $\gamma(b)$* ***Endpunkt*** *der Kurve.*

Definition 32.2 (zusammenhängende Teilmenge):
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ nennt man ***zusammenhängend****, wenn es für jedes $z_1, z_2 \in A$ eine Kurve gibt mit z_1 als Anfangspunkt und z_2 als Endpunkt, bei der die Bildmenge in A liegt.*

Definition 32.3 (spezielle Kurven):
Einige spezielle Kurven $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind wie folgt definiert.

- *Wenn γ stetig (reell) differenzierbar*[a] *ist und $|\gamma'(t)| \neq 0$, nennen wir γ eine* ***glatte*** oder ***reguläre Kurve***
- *Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ nennt man die Kurve* ***geschlossen***
- *Wenn $\gamma\colon (a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ injektiv*[b] *sind, heißt die Kurve* ***einfach***
- *Wenn sie geschlossen und einfach ist, nennt man sie eine* ***Jordan-Kurve***

[a] Die Abbildung $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, wenn $\operatorname{Re}\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), die rechte Ableitung in a und die linke Ableitung in b existieren, und $\gamma^*(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\gamma(a+\varepsilon)-\gamma(a)}{\varepsilon} & \text{für } t = a \\ \gamma'(t) & \text{für } t \in (a,b) \\ \lim\limits_{\varepsilon\uparrow 0} \frac{\gamma(b+\varepsilon)-\gamma(b)}{\varepsilon} & \text{für } t = b \end{cases}$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$ ist

[b] Keine Doppelpunkte mit der Ausnahme, dass Anfangs- und Endpunkt identisch sein dürfen

Lemma 32.1:
Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\zeta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei glatte Kurven, die sich für $t \in (a,b)$ und $s \in (c,d)$ schneiden in α. Also $\alpha = \gamma(t) = \zeta(s)$. Nehme an, dass $f'(\alpha) \neq 0$.
Dann schneiden sich die Bildkurven $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f \circ \zeta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ für $t \in (a,b)$ und $s \in (c,d)$ an der Stelle $f(\alpha)$ mit dem gleichen Winkel und mit gleicher Orientierung wie γ und ζ für $t \in (a,b)$ und $s \in (c,d)$ an der Stelle α.

Definition 32.4 (stückweise glatte Kurve):
*Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ nennt man eine **stückweise glatte Kurve**, wenn es endlich viele $a_i \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

derart, dass $\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}\colon [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{C}$ für jedes $i \in \{0, n-1\}$ eine glatte Kurve ist.

Notation

- Für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definieren wir die Kurve $-\gamma\colon [a,b]$ durch

$$(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$$

- Für zwei Kurven $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\zeta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(b) = \zeta(c)$ definieren wir die Kurve $\gamma + \zeta\colon [a, b+d-c]$ durch

$$(\gamma + \zeta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \zeta(t-b+c) & \text{für } t \in (b, b+d-c] \end{cases}$$

- Für eine geschlossene Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ wird $n\gamma\colon [a, n(b-a)+b]$ mit $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$(n\gamma)(t) = \gamma\big(t - k(b-a)\big) \text{ für } t \in [a+k(b-a), b+k(b-a)] \text{ und } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

32.2. Kurvenintegrale

Definition 32.5 (Kurvenintegral):
*Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit U offen und sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma[a,b] \subset U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Man definiert das **Kurvenintegral** $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ durch*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemma 32.2:

1. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve und seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt*
$$\int_\gamma \Big(\alpha f(z) + \beta g(z)\Big)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$$
2. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve und sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für $-\gamma$, wie in obiger Notation, gilt*
$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$
3. *Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(b) = \delta(c)$ und sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für $\gamma + \delta$, wie in obiger Notation, gilt*
$$\int_{\gamma+\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\delta f(z)\,\mathrm{d}z$$

Lemma 32.3:

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ derartig, dass $t \mapsto \mathrm{Re}\big(g(t)\big)$ und $t \mapsto \mathrm{Im}\big(g(t)\big)$ (Riemann-) integrierbar sind, dann ist auch $t \mapsto |g(t)|$ (Riemann-) integrierbar und außerdem gilt
$$\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$
Wenn wir dieses Ergebnis auf ein Kurvenintegral für $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ anwenden, folgt
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f\Big(\gamma(t)\Big)\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f\circ\gamma(t)|\cdot|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t =: \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$$

Lemma 32.4:

Sei U offen und sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $\gamma\colon [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ und $\zeta\colon [c,d] \to U \subset \mathbb{C}$ einfache glatte Kurven sind mit dem gleichen Bild, das in gleicher Richtung durchlaufen wird, dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\zeta f(z)\,\mathrm{d}z$$
„Gleiches Bild in gleicher Richtung durchlaufen“ heißt, es gib eine monoton wachsende bijektive Abbildung $s\colon [a,b] \to [c,d]$ mit $\gamma(t) = (\zeta\circ s)(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

Lemma 32.5:

Sei U offen, $F\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $F' = f$ auf U. Wenn $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve ist, dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Korollar 32.5.a:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\alpha, \beta \in U$. Wenn f auf $U \subset \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F besitzt, dann gilt für jede Kurve γ, die α als Anfangspunkt hat, β als Endpunkt und die innerhalb von U verläuft, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\beta) - F(\alpha)$.

33. Kurvenintegrale und Cauchy

33.1. Stammfunktion und geschlossene Kurven

Satz 33.1:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Menge. Nehmen wir an, dass $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig ist, und dass für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma[a, b] \subset U$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Sei $z_0 \in U$ und sei $\zeta_{z_0}^z$ irgendeine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die z_0 innerhalb U mit z verbindet. Dann ist

$$F(z, z_0) = \int_{\zeta_{z_0}^z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

wohldefiniert für $z \in U$, es gilt $z \mapsto F(z, z_0)$ ist holomorph auf U, und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(z, z_0) = f(z)$.

33.2. Der Integralsatz von Cauchy

Definition 33.1 (einfach zusammenhängende Teilmenge):
Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, wenn U und $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ zusammenhängend sind.

Theorem 33.1 (Integralsatz von Cauchy):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare geschlossene Kurve γ, die innerhalb von U verläuft, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Korollar 33.1.a:
Holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{C}$ haben eine Stammfunktion.

33.3. Residuum

Lemma 33.1:
Für jede stückweise differenzierbare Jordan-Kurve, die links um 0 herum läuft, gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath$$

Theorem 33.2:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, seien $w_1, \ldots, w_m \in U$ unterschiedlich und $f\colon U \setminus \{w_1, \ldots, w_m\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Bild innerhalb von U, die links herum läuft. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und genügend klein:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{w_i \in \textit{ Innengebiet } \gamma} \int_{\substack{t \mapsto w_i + \varepsilon \mathrm{e}^{\imath t} \\ t \in [0,2\pi]}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Definition 33.2 (Residuum):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $w \in U$. Für $f\colon U \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph definiert man das ***Residuum*** *an der Stelle w durch*

$$\mathrm{Res}_w(f) = \frac{1}{2\pi\imath} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_{w,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für $\gamma_{w,\varepsilon}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_{w,\varepsilon}(t) = w + \varepsilon \mathrm{e}^{\imath t}$.

Theorem 33.3 (Residuensatz für linksdrehende Jordan-Kurven):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, seien $w_1, \ldots, w_m \in U$ unterschiedlich und $f\colon U \setminus \{w_1, \ldots, w_m\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurve innerhalb von U, die links herum läuft. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath \sum_{w_i \in \textit{ Innengebiet } \gamma} \mathrm{Res}_{w_i}(f)$$

34. Singuläre Stellen

34.1. Die Integralformel von Cauchy

Theorem 34.1 (Integralformel von Cauchy):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ für $r > 0$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

34.2. Holomorphe Funktionen haben holomorphe Ableitungen

Lemma 34.1:
Sei $f : [a,b] \times [0,\nu_0] \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $x \mapsto f(x,\nu)$ integrierbar ist für jedes $\nu \in [0,\nu_0]$. Wenn

$$\lim_{\nu \downarrow 0} f(x,\nu) = f(x,0) \text{ gleichmäßig für } x \in [a,b]$$

dann gilt

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \int_a^b f(x,\nu)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,0)\,\mathrm{d}x$$

Korollar 34.1.a:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ für $r > 0$. Dann existieren alle Ableitungen von f innerhalb $B_r(z_0)$ und es gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

34.3. Holomorph mit Ausnahme einer Singularität

Lemma 34.2:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist auf $U \setminus \{z_0\}$ und stetig ist in z_0. Dann ist f holomorph auf U.

Theorem 34.2 (Hebbarkeitssatz von Riemann):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und dass f beschränkt ist in einer Umgebung von z_0. Dann existiert $\lim_{z \to z_0} f(z)$ und die Funktion $\tilde{f}$, definiert durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \textit{für } z \neq z_0 \\ \lim_{z \to z_0} f(z) & \textit{für } z = z_0 \end{cases}$$

ist holomorph auf U.

Lemma 34.3:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und f folgende Abschätzung erfüllt. Es gibt $M, r, \alpha \in \mathbb{R}_+$ derart, dass

$$|f(z)| \leq M|z - z_0|^{-\alpha} \textit{ für } z \in B_r(z_0)$$

Dann existieren $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ mit $n = [\alpha] = \max\{n \in \mathbb{N} \colon n \leq \alpha\}$ und eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ so dass

$$f(z) = \beta_n(z - z_0)^{-n} + \beta_{n-1}(z - z_0)^{1-n} + \dots + \beta_1(z - z_0)^{-1} + g(z) \textit{ für } z \in U$$

34.4. Pole und wesentliche Singularitäten

Betrachte man eine Funktion $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die holomorph ist auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$, dann sagt Lemma 34.3, dass es genau die folgenden drei Möglichkeiten gibt:

1. Die Singularität in z_0 ist **hebbar**:

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) \text{ existiert}$$

   Außerdem gilt, dass die erweiterte Funktion

   $$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

   holomorph ist auf $B_r(z_0)$

2. Die Singularität in z_0 ist ein **Pol n-ter Ordnung** mit $n \in \mathbb{N}_+$. Hier ist n die kleinste Zahl in $\mathbb{N}_+$, für die gilt

   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \text{ existiert}$$

   Außerdem gilt, dass es Konstanten $c_i \in \mathbb{C}$ mit $c_n \neq 0$ und eine holomorphe Funktion h auf $B_r(z_0)$ gibt derart, dass

   $$f(z) = \frac{c_n}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_1}{z - z_0} + h(z) \text{ für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

3. Die Singularität in z_0 ist **wesentlich**:

   $$\text{Es gibt kein } n \in \mathbb{N} \text{ derart, dass } \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \text{ existiert}$$

   Es folgt, dass auf jeder Umgebung U von z_0 und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $z \mapsto |z - z_0|^n |f(z)|$ unbeschränkt ist.

35. Analytische Funktionen

35.1. Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Definition 35.1 (analytische Funktion):
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei U eine Umgebung von z_0. Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ nennt man ***analytisch*** *in z_0, wenn es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius gibt derart, dass $r > 0$ existiert mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in B_r(z_0)$$

Theorem 35.1:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und sei $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \tag{35.1}$$

dass sie einen Konvergenzradius $R \geq r$ hat und dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \text{ für alle } z \in B_r(z_0)$$

Lemma 35.1:
Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Es gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\imath} \oint_{|w - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z$$

Korollar 35.1.a:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und nehme an, $B_R(z_0) \subset U$ und $w \in \partial B_R(z_0) \cap U$. Sei $f\colon U \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph und nehme an, dass f eine nicht-hebbare Singularität in w besitzt. Dann hat die Taylorreihe zu f bei z_0, d. h. die Potenzreihe in (35.1), Konvergenzradius R.

Theorem 35.2 (zur eindeutigen Fortsetzung):
Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f_i\colon U_i \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Sei $z_0 \in U_1 \cap U_2$ und nehme an, es gibt $r > 0$ mit

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für } z \in B_r(z_0)$$

Dann gilt für jedes Gebiet $A \subset U_1 \cap U_2$ mit $z_0 \in A$: $f_1(z) = f_2(z)$ für $z \in A$.

35.2. Nullstellen eines Polynoms

Korollar 35.2.a:
Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Theorem 35.3:
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Dann gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

35.3. Das Maximum-Prinzip

Korollar 35.3.a:
Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt entweder

1. $|f(z_0)| < \max\Big\{|f(z)|\colon z \in \partial B_r(z_0)\Big\}$

oder

2. $|f(z_0)| = |f(z)|$ *für alle* $z \in \partial B_r(z_0)$

Korollar 35.3.b:
Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt die ***erste Mittelwerteigenschaft****:*

$$f(z_0) = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\imath\varphi})\,\mathrm{d}\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}$$

Korollar 35.3.c:
Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_R(z_0)} \subset U$, dann gilt die ***zweite Mittelwerteigenschaft****:*

$$f(z_0) = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\imath\varphi}) \cdot r\,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r}{\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r}$$

Theorem 35.4 (Das Maximum-Prinzip für holomorphe Funktionen):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei f holomorph auf U.

- *Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Maximum hat in $z_0 \in U$, dann ist f konstant*
- *Falls U beschränkt ist und f stetig auf $\overline{U}$ ist, nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂U an*

Lemma 35.2 (Minimum-Prinzip für holomorphe Funktionen):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Minimum hat in $z_0 \in U$, dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant auf U.

36. Eigenschaften holomorpher Funktionen

36.1. Ganze Funktionen

Definition 36.1 (ganze Funktion):
*Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die holomorph ist auf $\mathbb{C}$, nennt man eine **ganze Funktion**.*

Theorem 36.1:
Sei f eine ganze Funktion. Wenn es $n \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}_+$ gibt derart, dass

$$|f(z)| \leq C(|z|^n + 1) \ \forall z \in \mathbb{C}$$

dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

Theorem 36.2 (Liouville, 1. Fassung):
Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Theorem 36.3 (Liouville, 2. Fassung):
Eine ganze Funktion, deren Realteil einseitig beschränkt ist, ist konstant.

36.2. Äquivalente Aussagen

Theorem 36.4:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *f ist holomorph auf U:*
   für jedes $u \in U$ existiert $f'(u)$.
2. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf U:*
   $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + \imath y)$ und $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + \imath y)$ sind differenzierbar für $x + \imath y \in U$ und $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gelten
3. *f hat lokal eine Stammfunktion:*
   für jedes $z_0 \in U$ gibt es $B_r(z_0) \subset U$ mit $r > 0$ und $F\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$
4. *f ist analytisch auf U:*
   für jedes $z_0 \in U$ gibt es $B_r(z_0) \subset U$ mit $r > 0$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ für $z \in B_r(z_0)$

Definition 36.2 (Nullstelle und Pol holomorpher Funktionen):
Sei $z_0 \in U$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen.

- *Eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ hat eine* ***Nullstelle der Ordnung*** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_+$, *wenn*
$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$
mit $\alpha_n \neq 0$
- *Eine holomorphe Funktion $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ hat einen* ***Pol vom Grad*** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_+$, *wenn*
$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$
mit $\alpha_n \neq 0$

Theorem 36.5 (Identitätssatz):
Sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. *$f(z) = 0$ für alle $z \in U$*
2. *Es gibt $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$*
3. *Die Menge $\{z \in U\colon f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt in U*

36.3. Verbindung mit reellen Funktionen

Definition 36.3 (reell-analytische Funktion):
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt ***reell-analytisch****, wenn es für jedes $x_0 \in I$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gibt, mit $f(x) = p(x)$ für $|x - x_0| < \varepsilon$.*

Der Laplace-Operator

Der **Laplace-Operator** ist für n Dimensionen, das heißt für Funktionen
$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$
definiert durch
$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2$$

Definition 36.4 (harmonische Funktion):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ***harmonisch****, wenn ihre zweiten Ableitungen auf Ω existieren und*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) \in \Omega$$

Satz 36.1:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Definiere

$$U_{\mathbb{R}} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + \imath y \in U\Big\}$$

Dann ist die Funktion $u\colon U_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\Big(f(x+\imath y)\Big)$$

harmonisch.

Theorem 36.6:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\Big(f(x+\imath y)\Big)$$

36.3.1. Intermezzo

Theorem 36.7 (Gauß):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\vec{F}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Auf dem Rand $\partial\Omega$ soll der auswärtige Normalenvektor $\vec{n}$ wohldefiniert sein. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}s = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \,\mathrm{d}x$$

37. Harmonische Funktionen in 2 Dimensionen

37.1. Die stationäre Wärmeleitungsgleichung

Lemma 37.1:
Wenn u harmonisch ist auf einer Umgebung von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, dann gilt für $x = (x_1, x_2) \in B_1(0)$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} u(y) \, \mathrm{d}\sigma_y$$

37.2. Folgen der Holomorphie

Lemma 37.2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Wenn $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, dann gilt die ***erste Mittelwerteigenschaft****:*

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\|y - x_0\|=r} u(y) \, \mathrm{d}\sigma_y$$

und auch die ***zweite Mittelwerteigenschaft****:*

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\|y - x_0\| \le r} u(y) \, \mathrm{d}y$$

Theorem 37.1 (Das Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und sei u harmonisch auf Ω.

- *Wenn $x \mapsto u(x)$ ein lokales Maximum hat in $x_0 \in \Omega$, dann ist u konstant*
- *Falls Ω beschränkt ist und u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, nimmt u das Maximum auf $\partial\Omega$ an*

Satz 37.1:
Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u_{Rand} \colon \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = u_{Rand} & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(B_1(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_1(0)})$ und

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} u_{Rand}(y) \, \mathrm{d}\sigma_y$$

Diese Formel ist bekannt als die ***Integralformel von Poisson****.*

Theorem 37.2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet. Eine stetige Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist harmonisch genau dann, wenn u für jede Kreisscheibe $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ die erste Mittelwerteigenschaft erfüllt.

37.3. Subharmonische Funktionen

Definition 37.1 (subharmonisch):
Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Eine zweimal differenzierbare Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ***subharmonisch*** *auf Ω, wenn*

$$-\Delta u \leq 0$$

Theorem 37.3:
Eine subharmonische Funktion auf $B_R(0)$, die stetig ist auf $\overline{B_R(0)}$, erfüllt die Submittelwerteigenschaften:

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} u(y) \,\mathrm{d}\sigma_y \quad \textit{und} \quad u(0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\|y\|\leq R} u(y) \,\mathrm{d}y$$

37.4. Positive harmonische Funktionen

Theorem 37.4 (Die Harnacksche Ungleichung auf einer Kreisscheibe):
Sei u eine positive harmonische Funktion auf $B_R(0)$. Sei $r < R$. Dann gilt

$$\frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+r}{R-r} u(0) \text{ für } x \in \overline{B_r(0)}$$

Theorem 37.5 (Die Harnacksche Ungleichung auf allgemeinen Gebieten):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und sei $K \subset \Omega$ kompakt und zusammenhängend. Dann gibt es $c_{\Omega,K} \in \mathbb{R}_+$ derart, dass für jede positive harmonische Funktion u auf Ω gilt:

$$\max_{x\in K} u(x) \leq c_{\Omega,K} \min_{x\in K} u(x)$$

38. Potentialströmungen

38.1. Ein Modell zu Potentialströmungen

Strömungsprobleme lassen sich oft beschreiben mit Hilfe eines Potentials. Das heißt, das Vektorfeld $\vec{v}$, das die Strömungsrichtung und Strömungsgeschwindigkeit beschreibt, ist der Gradient einer skalaren Funktion F. Diese Funktion F nennt man das **Potential**:

$$\vec{v} = -\nabla F \tag{38.1}$$

Zusätzlich zu einem Potentialfluss hat man oft noch einen Erhaltungssatz. So ein (physikalischer) Satz ist zum Beispiel die Annahme, dass in jedes Volumenelement gleich viel hinein wie heraus fließt. Wenn es sich um ein inkompressibles Fluid handelt, wird der Erhaltungssatz beschrieben durch die mathematische Bedingung

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{38.2}$$

Kombiniert man die beiden physikalischen Gleichungen (38.1) und (38.2), so bekommt man

$$\Delta F = 0$$

38.2. Potentialströme mit Randbedingungen

Wenn man eine Potentialströmung in einem Gebiet mit Rand betrachtet, dann kann man vermuten, dass der Rand eine Stromlinie ist. Anders gesagt, für das Potential F gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} F = \nabla F \cdot \vec{n} = 0 \text{ am Rand}$$

Diese Bedingung heißt **(homogene) Neumann Randbedingung**. „Homogen“, weil die rechte Seite 0 ist und „Neumann“, weil die Normalableitung festgelegt wird.

38.3. Beispiele von Potentialströmungen

Die Konstruktion einer Strömung entlang einer Wand oder um ein Hindernis herum ist fast mehr Kunst als Mathematik. Der umgekehrte Weg ist einfacher: Wenn eine holomorphe Funktion gegeben ist, können wir eine Wand in eine Stromlinie legen und finden eine passende Potentialströmung. Ob die tatsächlich auch alle Eigenschaften hat, die man möchte, sollte man dann noch kontrollieren.

38.4. Joukowski

Joukowski (Nikolai Yegorovich Zhukovsky, 1847–1921) war einer der Pioniere auf dem Gebiet der Aero- und Hydrodynamik.

39. Biholomorphe Abbildungen

39.1. Konform und biholomorph

Definition 39.1 (konform):
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $h\colon U \to \mathbb{C}$ heißt **konform**, wenn glatte Kurven in U überführt werden in glatte Kurven und wenn diese Abbildung winkel- und orientierungstreu ist.*

Lemma 39.1:
Jede holomorphe Abbildung $h\colon U \to \mathbb{C}$ mit $h' \neq 0$ in U ist konform.

Definition 39.2 (biholomorph):
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $h\colon U \to \mathbb{C}$ heißt **biholomorph**, wenn $h\colon U \to h(U)$ holomorph und bijektiv ist und auch die inverse Funktion $h^{\text{inv}}\colon h(U) \to U$ holomorph ist.*

Theorem 39.1 (Gebietstreue):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $h(G)$ ein Gebiet.

39.2. Kreisscheibe zu Kreisscheibe

Lemma 39.2:
Sei $z_0 \in B_1(0)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Dann ist $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ mit

$$f(z) = e^{\imath\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \tag{39.1}$$

biholomorph von $B_1(0)$ nach $B_1(0)$.

Lemma 39.3 (Das Schwarz'sche Lemma):
Sei $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph und sei $f(0) = 0$. Dann gilt:

1. *$|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$*
2. *Wenn außerdem $f'(0) = 1$ oder $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$, dann gilt $f(z) = z$.*

Korollar 39.3.a:
Die einzigen biholomorphen Abbildungen von $B_1(0)$ nach $B_1(0)$ sind die in (39.1).

39.3. Riemannscher Abbildungssatz

Theorem 39.2 (Der Riemannsche Abbildungssatz):
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $h\colon \mathbb{R} + \imath\mathbb{R}_+ \to G$.

40. Funktionen und Polstellen

40.1. Meromorphe Funktionen

Definition 40.1 (meromorph):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Funktion. Wenn folgendes gilt, nennt man f ***meromorph*** *auf U:*

- *$P := f^{-1}(\infty)$ hat keine Häufungspunkte*
- *P besteht nur aus Polstellen von f*
- *$f\colon U \subset P \to \mathbb{C}$ ist holomorph*

Lemma 40.1:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

1. *Wenn $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind mit $g \not\equiv 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ meromorph auf U.*
2. *Wenn h meromorph auf U ist, dann gibt es zu jedem $w \in U$ eine Umgebung $B_r(w)$ und zwei holomorphe Funktionen $f, g\colon B_r(w) \to \mathbb{C}$ mit $h = \frac{f}{g}$.*

Korollar 40.1.a:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und $f \not\equiv 0$. Dann gibt es für jedes $w \in U$ eine Zahl $r \in \mathbb{R}_+$, ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $\{a_k\}_{k_0 \leq k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ derart, dass $a_{k_0} \not\equiv 0$ und

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z-w)^k \text{ für } z \in B_r(w) \setminus \{w\}$$

Das heißt, $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z-w)^k$ konvergiert auf $B_r(w)$, und

- *für $k_0 > 0$ hat f eine Nullstelle von Ordnung k_0 in w*
- *für $k_0 < 0$ hat f eine Polstelle von Ordnung $|k_0| = -k_0$ in w*

Lemma 40.2:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen sind mit $g \not\equiv 0$, dann sind $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ meromorphe Funktionen auf U.

40.2. Nullstellen, Pole und ein Kurvenintegral

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und sei Γ das Bild einer linksherum laufenden (differenzierbaren) Jordan-Kurve γ. Nehmen wir an, dass Γ und sein Innengebiet in U liegen.
Sei f meromorph auf U und derart, dass f weder Nullstellen noch Polstellen auf Γ hat.

Wir schreiben dann

$$\begin{aligned}\#_N(f,\Gamma) &= \text{die Zahl der Nullstellen von } f \text{ innerhalb von } \Gamma \\ \#_P(f,\Gamma) &= \text{die Zahl der Polstellen von } f \text{ innerhalb von } \Gamma\end{aligned}$$

wobei diese Zahl inklusive Multiplizität gezählt wird. Die Multiplizität einer n-fachen Nullstelle in n; die Multiplizität eines Pols von Ordnung m ist m.

Lemma 40.3:
Seien f und Γ wie oben und sei γ eine Parametrisierung von Γ. Dann gilt

$$\#_N(f,\Gamma) - \#_P(f,\Gamma) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

Theorem 40.1 (Rouché):
Seien f und g meromorphe Funktionen auf U und seien f und Γ wie oben. Wenn

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in \Gamma$$

dann gilt

$$\#_N(f,\Gamma) - \#_P(f,\Gamma) = \#_N(g,\Gamma) - \#_P(g,\Gamma)$$

40.3. Partialbruchentwicklung

Eine meromorphe Funktion h ist holomorph mit möglicher Ausnahme von möglichst unendlich, aber höchstens abzählbar vielen Polstellen z_k. Bei so einer Polstelle kann man h wie folgt schreiben

$$h(z) = \sum_{\ell=-m}^{-1} \alpha_k (z - z_k)^\ell + g(z)$$

wobei g eine in einer Umgebung von z_k holomorphe Funktion ist und m ist die Ordnung des Pols. Man nennt

$$\sum_{\ell=-m}^{-1} \alpha_\ell (z - z_k)^\ell$$

den **Hauptteil** von h an der Stelle z_k. Übrigens, da die Parameter $m \in \mathbb{N}_+$ und $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen für jede Polstelle unterschiedlich sind, müsste man eigentlich m_k und $\alpha_{\ell,k}$ schreiben. Die Polstellen z_k mit den Hauptteilen nennt man die **Hauptteilverteilung** von h:

$$\left\{ \sum_{\ell=-m_k}^{-1} \alpha_{\ell,k} (z - z_k)^\ell \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Definition 40.2 (kompakt konvergent):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_\ell\colon U \to \mathbb{C}\}_{\ell=1}^\infty$ eine Folge meromorpher Funktionen. Man sagt, dass die Folge $\{\sum_{k=1}^{\ell} f_k\}_{\ell=1}^\infty$ ***kompakt konvergiert*** *auf U, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ ein ℓ_K gibt, so dass gilt:*

- *für $\ell \geq \ell_K$ sind die Funktionen f_ℓ holomorph auf K*
- *$\{\sum_{m=\ell_K}^{\ell} f_m\}_{\ell=1}^\infty$ konvergiert gleichmäßig auf K*

Theorem 40.2 (Mittag-Leffler):
Sei $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$. Sei $m_k \in \mathbb{Z}_-, \alpha_{k,\ell} \in \mathbb{C}$ und setze

$$f_k(z) = \sum_{\ell=m_k}^{-1} \alpha_{k,\ell}(z - z_k)^\ell$$

1. *Wenn es ganze Funktionen g_k gibt derart, dass*

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}(f_k - g_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \tag{40.1}$$

   kompakt konvergiert für $m \to \infty$, dann ist F, definiert durch

$$F(z) := \sum_{k=1}^{\infty}(f_k - g_k)(z)$$

   eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit der gewünschten Hauptteilverteilung

2. *Nimmt man für g_k das Taylorpolynom zu f_k in 0 mit hinreichend hohem Grad, dann ist (40.1) kompakt konvergent*

Theorem 40.3 (Partialbruchzerlegung):
Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polstellen $0 = |z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ ohne Häufungsstelle und mit Hauptteilverteilung $\{f_\ell\}_{\ell=0}^\infty$.

1. *Dann gibt es $\{\ell_k\}_{k=0}^\infty \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$g(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(z) - T_{\ell_k}(z))$$

   kompakt konvergiert. Hier ist $T_{\ell_k}(z)$ das Taylorpolynom zu f_k in 0 vom Grad ℓ_k

2. *Wenn*

$$g(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(z) - T_{\tilde{\ell}_k}(z))$$

   kompakt konvergiert, dann gibt es eine ganze Funktion h derart, dass

$$f(z) = h(z) + g(z)$$

40.4. Beispiele einiger Partialbruchentwicklungen

Satz 40.1:
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{(\sin z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

Satz 40.2:
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \\
\left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}-n\right)^2} \\
\pi\cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \\
\pi\tan(\pi z) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-\frac{1}{2}-n} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\
\frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \\
\frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2} \\
\frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \pi + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) \\
\frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \pi + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{z^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

41. Funktionen und Nullstellen

41.1. Ganze Funktionen mit bestimmten Nullstellen

Definition 41.1 (Nullstellenverteilung):
*Die ganze Funktion f hat eine **Nullstellenverteilung** $\left\{(a_k, n_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $n_k \in \mathbb{N}_+$, wenn f genau die Nullstellen a_k von Ordnung n_k hat.*

41.2. Unendliche Produkte und Reihen

Lemma 41.1:
Sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \log(1+\alpha_k)$ *konvergiert gegen ein* $L \in \mathbb{C}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} 1+\alpha_k$ *konvergiert gegen ein* $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Lemma 41.2:
Sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k|$ *konvergiert*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |\log(1+\alpha_k)|$ *konvergiert*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+|\alpha_k|)$ *konvergiert*
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} 1+|\alpha_k|$ *konvergiert*

41.3. Der Satz von Weierstraß

Lemma 41.3:
Wenn g eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist, dann gibt es eine ganze Funktion h mit

$$g(z) = \mathrm{e}^{h(z)}$$

Korollar 41.3.a:
Wenn zwei ganze Funktionen g_1, g_2 die gleiche Nullstellenverteilung haben, dann gibt es eine ganze Funktion h mit

$$g_1(z) = \mathrm{e}^{h(z)} g_2(z)$$

Theorem 41.1 (Produktsatz von Weierstraß):
Sei $\left\{(a_k, n_k)\right\}_{k=0}^{\infty}$ eine Nullstellenverteilung ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass

$$0 = a_0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \dots$$

Sei $\ell_k \in \mathbb{N}$. Wenn

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \sum_{m=0}^{\ell_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m \right)$$

kompakt konvergiert, dann ist

$$f(z) := z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp\left(\sum_{m=1}^{\ell_k+1} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m \right) \right)^{n_k}$$

eine ganze Funktion mit obengenannter Nullstellenverteilung.

41.4. Einige Nullstellenentwicklungen

Satz 41.1:
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{k} \right) \mathrm{e}^{\frac{z}{k}}$$

Satz 41.2:
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k \in \mathbb{N}_+} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right)$$

$$\cos(\pi z) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{k + \frac{1}{2}} \right) \exp\left(\frac{z}{k + \frac{1}{2}} \right)$$

Korollar 41.2.a (Produkt von Wallis):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k \in \mathbb{N}_+} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}$$

42. Spezielle Funktionen

42.1. Die Gamma-Funktion

Definition 42.1 (Euler-Mascheroni-Konstante):
Die ***Euler-Mascheroni-Konstante*** *wird definiert durch*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = 0.5772156649015328606065120900824024310422\dots$$

Bemerkung 42.1:
Es ist immer noch nicht bekannt, ob γ rational oder irrational ist.

Definition 42.2 (Gamma-Funktion):
Die meromorphe Funktion Γ auf $\mathbb{C}$, definiert durch

$$\Gamma(z) = \mathrm{e}^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{k\in\mathbb{N}_+} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \exp \frac{z}{k}$$

mit γ aus Definition 42.1, heißt ***Gamma-Funktion****.*

Lemma 42.1:
Es gilt:

- $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}$

Lemma 42.2:
Es gilt $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Lemma 42.3:
Es gilt $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! \exp(z \ln n)}{\prod_{k=0}^{n}(k+z)}$.

Lemma 42.4:
Für $\operatorname{Re} z \geq 1$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp\Big((z-1)\ln(t) - t\Big)\,\mathrm{d}t$$

42.2. Die Riemannsche ζ-Funktion

Die formale Definition der Riemann-ζ-Funktion findet man in Definition 6.3.

Lemma 42.5:
Setzt man

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z \ln n) \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z > 1$$

dann ist diese eine Erweiterung der Riemann-ζ-Funktion.

Theorem 42.1:
Sei $\gamma_{r,\delta}$ mit $0 < \delta < r < \pi$ eine Kurve, die $\infty_{\mathbb{R}} + \imath\delta$, $\sqrt{r^2 - \delta^2} + \imath\delta$, $\sqrt{r^2 - \delta^2} - \imath\delta$ und $\infty_{\mathbb{R}} - \imath\delta$ verbindet. Wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$, dann gilt

$$\zeta(z) = -\Gamma(1-z) \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp\big((z-1)\log(-w)\big)}{\exp(w) - 1} \,\mathrm{d}w \tag{42.1}$$

Lemma 42.6:
Sei $0 < \delta < r < \pi$. Die rechte Seite in (42.1) hängt nicht von r oder δ ab und ist wohldefiniert als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

Definition 42.3 (Erweiterung der Riemann-ζ-Funktion):
Man definiert für $\sigma \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \sigma \leq 1$ und $\sigma \notin \mathbb{N}_+$ die ***Erweiterung der Riemann-ζ-Funktion*** *durch die rechte Seite in (42.1).*

Theorem 42.2 (Leonhard Euler, 1707-1783):
Sei $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ die Menge der Primzahlen. Für $s > 1$ gilt

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \exp(-z \ln p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z \ln n) = \zeta(z)$$

Vermutung („The Riemann Hypothesis“):

Außer den trivialen Nullstellen $\{-2, -4, -6, \ldots\}$ hat die Riemannsche-ζ-Funktion nur Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

42.3. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Lemma 42.7:
Wenn eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch ist, sowohl bezüglich $p_1 \in \mathbb{R}_+$ als auch $p_2 \in \mathbb{R}_+$, dann gilt $f = c$ oder es gibt $p_0 \in \mathbb{R}_+$ derart, dass f periodisch ist mit Periode $p_0 \in \mathbb{R}_+$ und $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0} \in \mathbb{N}_+$.

Lemma 42.8:
Wenn eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ periodisch bezüglich $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, dann gilt $f = c$ oder es gibt $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle 0, mit

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$$

Definition 42.4 (elliptische Funktion):
Eine meromorphe Funktion mit zwei reell unabhängigen komplexen Perioden $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt ***elliptische Funktion****.*

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind ***reell unabhängig****, wenn $c_1 z_1 + c_2 z_2 = 0$ als einzige reelle Lösung $c_1 = c_2 = 0$ hat.*

Lemma 42.9:
Eine holomorphe Funktion, die elliptisch ist, ist konstant.

Lemma 42.10:
Sei f eine elliptische Funktion mit Perioden p_1, p_2, die in

$$D = \Big\{\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 \colon 0 \le \theta_1 < 1 \text{ und } 0 \le \theta_2 < 1\Big\}$$

die Polstellen $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ hat. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(f) = 0$$

Lemma 42.11:
Eine elliptische Funktion f mit Perioden $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ nimmt in $D = \Big\{\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 \colon 0 \le \theta_1 < 1 \text{ und } 0 \le \theta_2 < 1\Big\}$ jeden Wert aus $\hat{\mathbb{C}}$ gleich oft an. (Man soll inklusive Vielfachheiten zählen.)

Theorem 42.3:
Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ reell unabhängig. Dann ist die Funktion $z \mapsto \wp(z, p_1, p_2)$ mit

$$\wp(z, p_1, p_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - n_1 p_1 - n_2 p_2)^2} - \frac{1}{(n_1 p_1 + n_2 p_2)^2} \right)$$

eine elliptische Funktion.

43. Konvergenz und Folgen

43.1. Gleichmäßige Konvergenz

Definition 43.1 (punktweise Konvergenz):
Seien $f_n\colon U \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergiert punktweise****, wenn es $\ell\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass*

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall z \in U\, \exists N_{\varepsilon,z} \in \mathbb{N}\, \forall n > N_{\varepsilon,z} \Rightarrow |f_n(z) - \ell(z)| < \varepsilon$$

***Vergleiche** mit Definition 22.6 (punktweise Konvergenz).*

Definition 43.2 (gleichmäßige Konvergenz):
Seien $f_n\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***konvergiert gleichmäßig****, wenn es $\ell\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}\, \forall z \in U\, \forall n > N_{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(z) - \ell(z)| < \varepsilon$$

***Vergleiche** mit Definition 22.5 (gleichmäßige Konvergenz).*

Definition 43.3 (gleichgradig stetig):
Eine Familie $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu\in I}$ von Funktionen $f_\nu\colon U \to \mathbb{K}$ nennt man ***gleichgradig stetig*** *in $x \in U$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0\colon |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon$$

„$\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig auf U“ heißt dann:

$$\forall x \in U\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0\colon |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon$$

Definition 43.4 (gleichgradig gleichmäßig stetig):
Eine Familie $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu\in I}$ von Funktionen $f_\nu\colon U \to \mathbb{K}$ nennt man ***gleichgradig gleichmäßig stetig****, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_{\varepsilon} > 0\colon |y - x| < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon$$

Theorem 43.1 (Arzelà-Ascoli):
Sei $K \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon K \to \mathbb{K}$ gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Theorem 43.2 (Montel):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und lokal gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Theorem 43.3 (Weierstraß):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph. Außerdem konvergiert $f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

43.2. Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

Theorem 43.4 (Der Riemannsche Abbildungssatz auf $B_1(0)$):
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f\colon G \to B_1(0)$. Sei $z_0 \in G$. Wenn man $f(z_0) = 0$ und $\arg(f'(z_0)) \in (-\pi, \pi]$ vorschreibt, gibt es genau eine solche Abbildung f.

43.3. Schwarz und Christoffel

Satz 43.1 (Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip):
Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, das symmetrisch ist bezüglich der reellen Achse. Wenn gilt, dass

1. *f holomorph ist auf $\{z \in G\colon \operatorname{Im} z > 0\}$,*
2. *f stetig ist auf $\{z \in G\colon \operatorname{Im} z \geq 0\}$ und*
3. *$f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$,*

dann ist

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{auf } \{z \in G\colon \operatorname{Im} z \geq 0\} \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{auf } \{z \in G\colon \operatorname{Im} z < 0\} \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf G.

Theorem 43.5 (Schwarz-Christoffel):
Sei P ein Polygon in $\mathbb{C}$. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung

$$h\colon (\mathbb{R} + \imath\mathbb{R}_+) \to P$$

Wenn wir die Eckpunkte von P entgegen dem Uhrzeigersinn $w_1, \dots, w_n$ nennen und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörigen Winkel, die die Änderungen in der Tangentialrichtung messen, d. h.

$$\alpha_k = \arg\left(\frac{w_{k+1} - w_k}{w_k - w_{k-1}}\right) \text{ für } k = 1, \dots, n$$

(setze $w_n = w_0$ und $w_{n+1} = w_1$), dann gibt es $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit $h(x_k) = w_k$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $h(\infty) = w_n$ und es gilt

$$h'(z) = \alpha(z - x_1)^{\frac{-\alpha_1}{\pi}}(z - x_2)^{\frac{-\alpha_2}{\pi}} \cdots (z - x_{n-1})^{\frac{-\alpha_{n-1}}{\pi}}$$

Verzeichnisse

A. Bibliografie

A.a. Literaturverzeichnis

[1] Guido Sweers. *Analysis I*. Vorlesungsskript. Mathematisches Institut, 2017. URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/Skripte-in-PDF/Analysis1.pdf.

[2] Guido Sweers. *Analysis II*. Vorlesungsskript. Mathematisches Institut, 2017. URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/Skripte-in-PDF/Analysis2.pdf.

[3] Guido Sweers. *Analysis III*. Vorlesungsskript. Mathematisches Institut, 2018. URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/Skripte-in-PDF/Analysis3.pdf.

[4] Guido Sweers. *Funktionentheorie*. Vorlesungsskript. Mathematisches Institut, 2012. URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/Skripte-in-PDF/Funktionentheorie.pdf.

A.b. Online-Quellen

[5] URL: http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers (besucht am 13. 02. 2018).

B. Index

-L-

-M-

-N-

-O-

-P-

C. Definitionen

I. Vorlesungsreihe Analysis - Definitionen & Theoreme

i. Analysis I 1

D. Theoreme

I. Vorlesungsreihe Analysis - Definitionen & Theoreme

i. Analysis I 1